第 29 卷 第 4 期 集美大学学报 (自然科学版) Vol. 29 No. 4
2024 年 7 月 Journal of Jimei University (Natural Science) Jul. 2024

[文章编号] 1007 - 7405(2024)04 - 0365 - 05 DOI:10.19715/j.jmuzr.2024.04.09

一类拟线性薛定谔方程解的存在性

周梦云，蓝永艺

(集美大学理学院，福建 厦门 361021)

[摘要] 在 $\mathbf{R}^N$ 上探究形式为 $-\Delta u+V(x)u-\Delta(u^2)u=h(u)$ 的拟线性薛定谔方程解的存在性，其中 $N\geqslant 3$，V: $\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$，$h$：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$。运用变分法和山路引理，证明了当函数 V 和非线性项 h 分别满足一些适当条件时，该拟线性薛定谔方程存在一个非平凡正解。

[关键词] 拟线性薛定谔方程；变分法；山路引理；正解

[中图分类号] O 177.91

Existence of Solutions for a Class of Quasilinear Schrödinger Equation

ZHOU Mengyun, LAN Yongyi

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: The existence of the quasilinear Schrödinger equation in $\mathbf{R}^N$ of the form $-\Delta u+V(x)u-\Delta(u^2)u=h(u)$, where $N\geqslant 3$, V: $\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$, and h: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ were functions. Using variational method and mountain pass lemma, it was proved that the quasilinear Schrödinger equation had a nontrivial positive solution when the function V and the nonlinear term h satisfy some appropriate conditions, respectively.

Keywords: quasilinear Schrödinger equation; variational methods; mountain pass lemma; positive solution

0 引言

受文献 [1-5] 的启发，本文主要在 $\mathbf{R}^N$ 上研究形式为

$$-\Delta u+V(x)u-\Delta(u^2)u=h(u) \tag{1}$$

的拟线性薛定谔方程，其中 $N\geqslant 3$，$V\in C^1(\mathbf{R}^N,\mathbf{R})$ 且 $h\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$。形式上，问题 (1) 的解对应于泛函 $J(u)=\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x/2+\int_{\mathbf{R}^N}u^2|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^N}H(u)\mathrm{d}x$ 的临界点，其中 $H(t)=\int_0^t h(s)\mathrm{d}s$。但可惜的是，对于每个在空间 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 上的 u，泛函 J 可能没有很好的定义。因此，标准变分方法不能得以运用。为了克服这个困难，本文应用了文献 [6-7] 的办法，对变量 $v=f^{-1}(u)$ 进行了同文献 [8-12] 相同的变换，其中 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上由 $f'(t)=1/\sqrt{1+2f^2(t)}$ 和 $f(0)=0$ 定义，在 $(-\infty,0]$ 上有 $f(t)=-f(-t)$。关于函数 f 的一些重要性质，可以在文献 [6-7, 13] 中找到。因此，利用上述变换，可以将泛函 $J(u)$ 改写为

$$I(v)=\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla v|^2+V(x)f^2(v))\mathrm{d}x/2-\int_{\mathbf{R}^N}H(f(v))\mathrm{d}x。 \tag{2}$$

[收稿日期] 2022-01-17
[基金项目] 福建省自然科学基金项目“奇异 Kirchhoff 型方程的解及相关问题研究”(2022J01339)
[作者简介] 通信作者：蓝永艺 (1977—)，副教授，从事非线性泛函分析方向研究，E-mail: lanyongyi@jmu.edu.cn

泛函 $I(v)$ 在 Sobolev 空间 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 中有很好的定义，并且是属于 C^1 类的，其中空间 $L^p(\mathbf{R}^N)$ 和 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 的标准范数分别用 $|\cdot|_p$ 和 $\|\cdot\|$ 表示。进而，如果 $v\in H^1(\mathbf{R}^N)$ 是 $I:H^1(\mathbf{R}^N)\to\mathbf{R}$ 的临界点，那么 $u=f(v)$ 就是问题（1）的解。在问题（1）中的非线性项 $h(u)$ 同时满足（AR）条件（存在 $\mu>4$，使得对于任意的 $t\in\mathbf{R}^+$，有 $0<\mu\int_0^t h(s)\mathrm{d}s\leqslant h(t)t$ 成立）和次临界增长条件的前提下，人们使用不同的方法找到了问题（1）的解，详见文献［8－9，14］。值得注意的是，大多数关于拟线性问题的研究，满足全局（AR）条件是必要的。

在证明许多偏微分方程有解的过程中，满足（AR）条件是重要的，（AR）条件不仅可以用来证明与问题（1）对应的能量泛函具有山路几何结构，而且还可以保证 Palais-Smale 序列对于能量泛函的有界性。然而，却有许多函数并不满足（AR）条件。此外，在实值泛函临界点的研究中，Palais-Smale 条件及其变式起着非常重要的作用。为了保证全局紧性，经常还需要非线性项 h 具有次临界增长条件，即：（h_0）存在 $C>0$ 和 $q\in(2,2\times2^*)$（其中 $2^*=2N/(N-2)$），使得 $|h(t)|\leqslant C(1+t^{q-1})$ 对于任意的 $t\in\mathbf{R}^+$ 都成立。

本文考虑比（AR）条件更弱的一个条件和一类具有更一般增长条件的椭圆型偏微分方程。假设以下条件成立：（V_1）对于所有 $x\in\mathbf{R}^N$，有 $0<\alpha:=\inf_{x\in\mathbf{R}^N}V(x)\leqslant V(x)\leqslant V_\infty:=\lim\limits_{|x|\to\infty}V(x)<+\infty$ 成立；（V_2）存在 $\sigma\in[1,2)$，使得 $\nabla V(x)x\in L^{2^*/(2^*-\sigma)}(\mathbf{R}^N)$。

对于非线性项 h，假设以下 3 个条件成立：（h_1）$h\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 和 $h(t)=o(t)$，$t\to0^+$；（h_2）$\lim\limits_{t\to+\infty}(h(t)/t^{2\times2^*-1})=0$；（$\mathrm{h}_3$）$\lim\limits_{t\to+\infty}(h(t)/t)=+\infty$。其中（$\mathrm{h}_2$）弱于（$\mathrm{h}_0$），（h3）弱于（AR）条件。

首先，很明显（h_0）可以推导出（h_2），这里存在函数，满足更一般的增长条件（h_2），却不满足次临界增长条件（h_0）。比如，令 $H(t)=t^{2\times2^*}/\ln(e+t^2)$，则 $h(t)=[2\times2^*t^{2\times2^*-1}(e+t^2)\ln(e+t^2)-2t^{2\times2^*+1}]/[(e+t^2)(\ln(e+t^2))^2]$。可以看出，函数 $h(t)$ 起关键作用的最高次幂项为带有 $t^{2\times2^*-1}$ 的项，显然不受（h_0）中不等式右边的项所控制，即不满足次临界增长条件。然而 $\lim\limits_{t\to+\infty}(h(t)/t^{2\times2^*-1})=\lim\limits_{t\to+\infty}[2\times2^*/\ln(e+t^2)]-\lim\limits_{t\to+\infty}[2/(e/t^2+1)(\ln(e+t^2))^2]=0$，可见其满足更一般的增长条件（$\mathrm{h}_2$）。

其次，可以找到许多函数不满足（AR）条件。例如，函数 $h(t)=2t\ln(1+|t|)$ 不满足（AR）条件但满足（h_3）。原因是（AR）条件是超二次的，而该函数次数却不超过二次，故不满足（AR）条件。又因为 $\lim\limits_{t\to+\infty}(h(t)/t)=\lim\limits_{t\to+\infty}[2\ln(1+|t|)]=+\infty$，所以函数满足（$\mathrm{h}_3$）。

本文假设，当 $t\leqslant0$ 时，$h(t)=0$。

定理 1 假设条件（V_1）~（V_2）和（h_1）~（h_3）成立，问题（1）有一个非平凡的解。

文中，字母 C 和 C_j 表示正常数，它们在不同的地方可取不同的值。

1 定理 1 的证明

分 3 步来证明定理 1。

1）满足（PS）条件。因为没有假设非线性项 h 在无穷远处是超四次线性的，所以似乎很难去证明泛函 I 对应的（PS）序列的有界性。为了克服这个困难，这里为泛函 I 构造一个特殊的（PS）序列。

首先，通过条件（h_1）和（h_3），可以找到一个正常数 K，使得对于所有 $t\in\mathbf{R}^+$，都有 $h(t)+Kt\geqslant0$。同时，令 $V_K(x)=V(x)+K$、$h_K(t)=h(t)+Kt$ 和 $H_K(t)=\int_0^t h_K(s)\mathrm{d}s$。那么对于所有 $t\in\mathbf{R}$，$H_K(t)=H(t)+Kt^2/2\geqslant0$ 成立。所以在 $H^1(\mathbf{R}^N)$ 上构造了一族 C^1-泛函 $I_\lambda(v)=\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla v|^2+V_K(x)f^2(v))\mathrm{d}x/2-\lambda\int_{\mathbf{R}^N}H_K(f(v))\mathrm{d}x$，其中 $\lambda\in[1/2,1]$。设 $A(v)=\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla v|^2+V_K(x)f^2(v))\mathrm{d}x/2$，

$B(v)=\int_{\mathbf{R}^N}H_K(f(v))\mathrm{d}x$，这里 $I_\lambda(v)=A(v)-\lambda B(v)$，且 B 保持非负。

其次，只需要证明泛函 I 满足文献［8］定理 3.1 的条件。此证明过程可分为 3 步，即：1）当 $\|v\|\to\infty$ 时，$A(v)\to+\infty$ 或 $B(v)\to+\infty$ 至少有一个成立；2）对于所有的 $\lambda\in[1/2,1]$，集合 $\Gamma_\lambda=\{\gamma\in C([0,1],H^1(\mathbf{R}^N))\,|\,\gamma(0)=0,I_\lambda(\gamma(1))<0\}$ 非空；3）$c_\lambda=\inf_{\gamma\in\Gamma_\lambda}\max_{t\in[0,1]}I_\lambda(\gamma(t))>0$，对于所有的 $\lambda\in[1/2,1]$ 成立。

事实上，从函数 f 的性质（即存在一个正常数 C，使得当 $|t|\leqslant1$ 时，$|f(t)|\geqslant C|t|$）可得，

$$\begin{aligned}\|v\|^2=&\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v|^2\mathrm{d}x+\int_{\{x||v(x)|\leqslant1\}}v^2\mathrm{d}x+\int_{\{x||v(x)|>1\}}v^2\mathrm{d}x\leqslant\\&\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v|^2\mathrm{d}x+C_1\int_{\{x||v(x)|\leqslant1\}}f^2(v)\mathrm{d}x+\int_{\{x||v(x)|>1\}}|v|^{2^*}\mathrm{d}x\leqslant\\&\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v|^2\mathrm{d}x+C_2\int_{\mathbf{R}^N}V_K(x)f^2(v)\mathrm{d}x+C_3\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v|^2\mathrm{d}x\right)^{2^*/2}\leqslant\\&C_4(A(v)+A(v)^{2^*/2})。\end{aligned}$$

这意味着，当 $\|v\|\to\infty$ 时，$A(v)\to+\infty$，即 1）得证。现在证明 2）。

考虑泛函 $J_\lambda(u)=\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^2+V_K(x)u^2)\mathrm{d}x/2+\int_{\mathbf{R}^N}u^2|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbf{R}^N}H_K(u)\mathrm{d}x$。设 $V_{K,\infty}=V_\infty+K$，取定一个非负函数 $\bar{u}\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)\setminus\{0\}$。而后，对于所有的 $t>0$，有

$$\begin{aligned}J_{1/2}(t\bar{u}(x/t))=&t^N\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla\bar{u}|^2\mathrm{d}x/2+t^{N+2}\int_{\mathbf{R}^N}V_K(tx)\bar{u}^2\mathrm{d}x/2+t^{N+2}\int_{\mathbf{R}^N}\bar{u}^2|\nabla\bar{u}|^2\mathrm{d}x-t^N\int_{\mathbf{R}^N}H_K(t\bar{u})\mathrm{d}x/2\leqslant\\&t^{N+2}\left[\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla\bar{u}|^2\mathrm{d}x/t^2+\int_{\mathbf{R}^N}V_{K,\infty}(tx)\bar{u}^2\mathrm{d}x+2\int_{\mathbf{R}^N}\bar{u}^2|\nabla\bar{u}|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^N}H_K(t\bar{u})/t^2\mathrm{d}x\right]/2。\end{aligned}$$

从条件（h_3）可知，对于足够大的 $t>0$，有 $J_{1/2}(t\bar{u}(x/t))<0$。当 $t>0$ 足够大时，选择 $u_0=t\bar{u}(\cdot/t)$，并定义 $v_0=f^{-1}(u_0)$，则对于所有的 $\lambda\in[1/2,1]$，有 $I_\lambda(v_0)=J_\lambda(u_0)\leqslant J_{1/2}(u_0)<0$ 成立。定义 $\gamma_0(t)=tv_0$，则对于所有的 $\lambda\in[1/2,1]$，有 $\gamma_0\in\Gamma_\lambda$。

最后证明 3）。定义 $\hat{H}(t)=-\alpha f^2(t)/2+H(f(t))$。应用条件（$\mathrm{h}_1$）、（$\mathrm{h}_2$）和函数 f 的性质（对所有 $t\in\mathbf{R}$，有 $|f'(t)|\leqslant1$ 和 $f^2(t)/2\leqslant f(t)f'(t)t\leqslant f^2(t)$，$\lim\limits_{t\to0}(f(t)/t)=1$，$\lim\limits_{t\to+\infty}(f(t)/\sqrt{t})=2^{1/4}$），可得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0}(\hat{H}(t)/t^2)=&\lim_{t\to0}(-\alpha f^2(t)/(2t^2)+H(f(t))/t^2)=\lim_{t\to0}[-\alpha f^2(t)/(2t^2)]+\\&\lim_{t\to0}(H(f(t))/t^2)=-\alpha/2+\lim_{t\to0}[h(f(t))f'(t)/(2t)]=-\alpha/2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim(\hat{H}(t)/|t|^{2^*})=&\lim_{t\to\infty}[(-\alpha f^2(t)/(2|t|^{2^*})+H(f(t))/(|t|^{2^*}))]=\\&\lim_{t\to\infty}[-\alpha f^2(t)/(2|t|^{2^*})]+\lim_{t\to\infty}(H(f(t))/|t|^{2^*})=\\&0+\lim_{t\to\infty}[h(f(t))f'(t)/|t|^{2^*-1}]=\\&\lim_{t\to\infty}[(h(f(t))/f(t)^{2\times2^*-1})(f(t)^{2\times2^*-2}/|t|^{2^*-1})(f(t)f'(t)t/t)]=0。\end{aligned}$$

因此，对于所有的 $t\in\mathbf{R}$，存在一个正常数 C_1，使得 $\hat{H}(t)\leqslant-\alpha t^2/4+C_1|t|^{2^*}$。由于 $\lambda\leqslant1$、$H_K(t)\geqslant0$ 和条件（V_1），从而有

$$\begin{aligned}I_\lambda(v)=&\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla v|^2+V_K(x)f^2(v))\mathrm{d}x/2-\lambda\int_{\mathbf{R}^N}H_K(f(v))\mathrm{d}x\geqslant\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla v|^2+V_K(x)f^2(v))\mathrm{d}x/2-\\&\int_{\mathbf{R}^N}H_K(f(v))\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla v|^2+V(x)f^2(v))\mathrm{d}x/2-\int_{\mathbf{R}^N}H(f(v))\mathrm{d}x\geqslant\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v|^2+\alpha f^2(v)\right)\mathrm{d}x/2-\int_{\mathbf{R}^N}H(f(v))\mathrm{d}x=\\
&\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v|^2\mathrm{d}x/2-\int_{\mathbf{R}^N}\hat{H}(v)\mathrm{d}x\geqslant\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v|^2\mathrm{d}x/2+\alpha\int_{\mathbf{R}^N}v^2\mathrm{d}x/4-C_1\int_{\mathbf{R}^N}|v|^{2^*}\mathrm{d}x\geqslant\\
&\min\{1/2,\alpha/4\}\|v\|^2-C_2\|v\|^{2^*}。
\end{aligned}
$$

因此，可得出 $c_\lambda>0$，即3）成立。

结合上面的证明和文献［8］的定理3.1可得，存在 $J_1\subset[1/2,1]$ 且 $\mathrm{meas}(J_1)=0$，使得对于任意的 $\lambda\in[1/2,1]\setminus J_1$，存在有界序列 $\{v_n\}\subset H^1(\mathbf{R}^N)$，且同时满足 $\lim\limits_{n\to\infty}I_\lambda(v_n)=c_\lambda$，在 $H^{-1}(\mathbf{R}^N)$ 中，$I_\lambda'(v_n)\to 0$。而当 $n\to\infty$ 时，由 $c_\lambda>0$ 可导出 $\|v_n\|\nrightarrow 0$。

通过文献［8］中的引理3.6，可得出 v_λ 是泛函 I_λ 的非平凡临界点，且有 $I_\lambda(v_\lambda)\leqslant c_\lambda$。接下来证明这个非平凡临界点 v_λ 满足 $\|v_\lambda\|\geqslant\delta$，其中 δ 是与 λ 无关的正常数。

事实上，根据条件（h_1）、（h_2）、函数 f 的定义、h_K 的定义及文献［8］中的引理2.1，对于所有的 $t\in\mathbf{R}$，有 $h_K(f(t))f'(t)t\geqslant 0$，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}[h_K(f(t))f'(t)t/(f(t)f'(t)t)]=\lim_{t\to 0}[h(f(t))f'(t)t/(f(t)f'(t)t)]+\\
&\lim_{t\to 0}[Kf(t)f'(t)t/(f(t)f'(t)t)]=\lim_{t\to 0}(h(f(t))/f(t)+K)=K,\\
&\lim_{t\to\infty}[h_K(f(t))f'(t)t/|t|^{2^*}]=\lim_{t\to\infty}[h(f(t))f'(t)t/|t|^{2^*}]+\lim_{t\to\infty}[Kf(t)f'(t)t/|t|^{2^*}]=\\
&\lim_{t\to\infty}[(h(f(t))/f(t)^{2\times 2^*-1})(f(t)^{2\times 2^*-2}/|t|^{2^*-1})(f(t)f'(t)t/|t|)]+0=0。
\end{aligned}
$$

因此对于所有的 $t\in\mathbf{R}$，存在一个正常数 C_1，使得 $h_K(f(t))f'(t)t\leqslant(\alpha/2+K)f(t)f'(t)t+C_1|t|^{2^*}$。

因为 v_λ 是泛函 I_λ 的一个非平凡临界点，所以由 $\langle I_\lambda'(v_\lambda),v_\lambda\rangle=0$ 可导出

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla v_\lambda|^2+(\alpha+K)f(v_\lambda)f'(v_\lambda)v_\lambda)\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla v_\lambda|^2+V_K(x)f(v_\lambda)f'(v_\lambda)v_\lambda)\mathrm{d}x=\\
&\lambda\int_{\mathbf{R}^N}h_K(f(v_\lambda))f'(v_\lambda)v_\lambda\mathrm{d}x\leqslant(\alpha/2+K)\int_{\mathbf{R}^N}f(v_\lambda)f'(v_\lambda)v_\lambda\mathrm{d}x+C_1\int_{\mathbf{R}^N}|v_\lambda|^{2^*}\mathrm{d}x。
\end{aligned}
$$

重新排列后，得到

$$
\begin{aligned}
&\min\{1,\alpha/4\}\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla v_\lambda|^2+f^2(v_\lambda))\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla v_\lambda|^2+\alpha f(v_\lambda)f'(v_\lambda)v_\lambda/2)\mathrm{d}x=\\
&\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla v_\lambda|^2+(\alpha+K)f(v_\lambda)f'(v_\lambda)v_\lambda)\mathrm{d}x-(\alpha/2+K)\int_{\mathbf{R}^N}f(v_\lambda)f'(v_\lambda)v_\lambda\mathrm{d}x\leqslant\\
&C_1\int_{\mathbf{R}^N}|v_\lambda|^{2^*}\mathrm{d}x\leqslant C_2\left(\int_{\mathbf{R}^N}1\mathrm{d}x\right)^{(2-2^*)/2}\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v_\lambda|^2\mathrm{d}x\right)^{2^*/2}\leqslant\\
&C_3\left(\int_{\mathbf{R}^N}|v_\lambda|^2\mathrm{d}x\right)^{2^*/2}\leqslant C_4\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v_\lambda|^2+f^2(v_\lambda))\mathrm{d}x\right)^{2^*/2}。
\end{aligned}
$$

由 $v_\lambda\neq 0$ 和文献［8］中的引理2.1，可得 $\|v_\lambda\|=\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v_\lambda|^2+v_\lambda^2)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\geqslant\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v_\lambda|^2+f^2(v_\lambda)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\geqslant\delta$ 对于某些正常数 δ 成立。

现在选择一个序列 $\lambda_n\subset[1/2,1]\setminus J_1$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=1$。基于前面的证明和泛函 I_λ 的定义，这里存在一列函数 $\{v_\lambda\}\subset H^1(\mathbf{R}^N)$，满足 $I_{\lambda_n}(v_{\lambda_n})\leqslant c_{\lambda_n}\leqslant c_{1/2}$、$I_{\lambda_n}(v_{\lambda_n})=0$ 和 $\|v_{\lambda_n}\|\geqslant\delta>0$。接下来要证明，$\{v_{\lambda_n}\}$ 的确是泛函 $I_1=I$ 的一个有界的（PS）序列。

一方面，借助于Pohožaev 型恒等式（见文献［8］中引理3.8）、文献［8］中推论1和 $I_{\lambda_n}(v_{\lambda_n})\leqslant c_{1/2}$，同时利用Hölder不等式、Sobolev不等式和条件（V_2），有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v_{\lambda_n}|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbf{R}^N}\nabla V(x)xf^2(v_{\lambda_n})\mathrm{d}x/2+Nc_{1/2}\leqslant|\nabla V(x)x|_{2^*/(2^*-\sigma)}\left(\int_{\mathbf{R}^N}f^{2\times 2^*/\sigma}(v_{\lambda_n})\mathrm{d}x\right)^{\sigma/2^*}/2+\\
&Nc_{1/2}\leqslant C_1\left(\int_{\mathbf{R}^N}|v_{\lambda_n}|^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\sigma/2^*}+Nc_{1/2}\leqslant C_2\left(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v_{\lambda_n}|^{\sigma/2}+Nc_{1/2}\leqslant C_3。\right.
\end{aligned}
$$

另一方面，使用与前面证明 $\|v_\lambda\| \geqslant \delta$ 中相同的参数，得到 $A(v_{\lambda_n}) \leqslant \max\{1, V_{K,\infty}\}\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla v_{\lambda_n}|^2 + f^2(v_{\lambda_n}))\mathrm{d}x/2 \leqslant C_4\int_{\mathbf{R}^N}|v_{\lambda_n}|^{2^*}\mathrm{d}x \leqslant C_5(\int_{\mathbf{R}^N}|\nabla v_{\lambda_n}|^2\mathrm{d}x)^{2^*/2} \leqslant C_6$。这里 $V_{K,\infty} = V_\infty + K$。因此，它表明 $A(v_{\lambda_n})$ 是有界的，又因为 A 是强制的，得到 $\{v_\lambda\}$ 在 $H_1(\mathbf{R}^N)$ 上是有界的。

2）山路几何结构。事实上，在步骤 1 证明 1）和 2）的过程中，已经证明了泛函 I_λ 具有山路几何结构。又因为步骤 1 中的 2）和 3）对于所有的 $\lambda \in [1/2, 1]$ 都是正确的，现在取 $\lambda = 1$，得到 $I_1 = I$ 具有山路几何结构。

3）I 的临界值。由于 $\limsup\limits_{n\to\infty} I(v_{\lambda_n}) = \limsup\limits_{n\to\infty}(I_{\lambda_n}(v_{\lambda_n}) + (\lambda_n - 1)\int_{\mathbf{R}^N}H_K(f(v_{\lambda_n})\mathrm{d}x)) \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} c\lambda_n = c_1$。同理，在 $H^{-1}(\mathbf{R}^N)$ 上有 $I'(v_{\lambda_n}) \to 0$。因此，得到了 $\{v_{\lambda_n}\} \subset H_1(\mathbf{R}^N)$ 是关于泛函 I 的一个有界的（PS）序列，满足 $\limsup\limits_{n\to\infty} I(v_{\lambda_n}) \leqslant c_1$，且当 $n\to\infty$ 时，有 $\|v_{\lambda_n}\| \nrightarrow 0$。然后利用文献［8］的引理 3.6 得到了 I 的一个非平凡临界点 v。

通过标准的证明方法可以得出，对于所有的 $x \in \mathbf{R}^N$，$v(x) \geqslant 0$ 成立。

［参考文献］

[1] ARCOYA D, BOCCARDO L, ORSINA L. Critical points for functionals with quasilinear singular Euler-Lagrange equations [J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2013, 47(1): 159-180. DOI: 10.1007/s00526-012-0514-3.

[2] JING Y, LIU Z, WANG Z Q. Multiple solutions of a parameter-dependent quasilinear elliptic equation[J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2016, 55(6): 150. DOI: 10.1007/s00526-016-1067-7.

[3] RUIZ D, SICILIANO G. Existence of ground states for a modified nonlinear Schrödinger equation[J]. Nonlinearity, 2010, 23(5): 1221-1233. DOI: 10.1088/0951-7715/23/5/011.

[4] CHEN J H, TANG X H, CHENG B T. Existence of ground state solutions for quasilinear Schrödinger equations with super-quadratic condition[J]. Applied Mathematics Letters, 2018, 79: 27-33. DOI: 10.1016/j.aml.2017.11.007.

[5] ZHANG J, ZHANG W, TANG X H. Ground state solutions for Hamilton elliptic system with in-verse square potential[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2017, 37(8): 4565- 4583. DOI: 10.3934/dcds.2017195.

[6] COLIN M, JEANJEAN L. Solutions for a quasilinear Schrödinger equations: a dual approach[J]. Nonlinear Analysis, 2004, 56(2): 213-226. DOI: 10.1016/j.na.2003.09.008.

[7] LIU J Q, WANG Y Q, WANG Z Q. Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations Ⅱ[J]. Journal of Differential Equations, 2003, 187(2): 473-493. DOI: 10.1016/S0022-0396(02)00064-5.

[8] LIU H D, ZHAO L G. Existence results for quasilinear Schrödinger equations with a general nonlinearity[J]. Communications on Pure and Applied Analysis, 2020, 19(6): 3429-3444. DOI: 10.3934/cpaa.2020059.

[9] LIU S B, ZHOU J. Standing waves for quasilinear Schrödinger equations with indefinite potentials[J]. Journal of Differential Equations, 2018, 265(9): 3970-3987. DOI: 10.1016/j.jde.2018.05.024.

[10] MIYAGAKI O H, SOARES S H M. Soliton solutions for quasilinear Schröding erequations with critical growth[J]. Journal of Differential Equations, 2010, 248(4): 722-744. DOI: 10.1016/j.jde.2009.11.030.

[11] XU L P, CHEN H B. Ground state solutions for quasilinear Schrödinger equations via Pohožaev manifold in Orlicz space[J]. Journal of Differential Equations, 2018, 265(9): 4417-4441. DOI: 10.1016/j.jde.2018.06.009.

[12] CHEN S T, TANG X H. Existence of ground state solutions for quasilinear Schrödinger equations with variable potentials and almost necessary nonlinearities[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2018, 157: 1-13.

[13] WANG Y J, ZOU W M. Bound states to critical quasilinear Schrödinger equations[J]. Nonlinear Differential Equations and Applications, 2012, 19(1): 19-47. DOI: 10.1063/1.4830027.

[14] SEVERO U B, GLOSS E, DA SILVA E D. On a class of quasilinear Schrödinger equations with superlinear or asymptotically linear terms[J]. Journal of Differential Equations, 2017, 263(6): 3550-3580. DOI: 10.1016/j.jde.2017.04.040.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）