

基于谱延迟校正的分数阶扩散方程的数值解法

杨郑亚, 陈雪娟, 梁宗旗

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 主要研究了时间分数阶扩散方程的高阶数值解法。在空间方向上利用 Fourier 谱方法, 在时间方向上采用谱延迟校正方法, 得到空间和时间方向均有谱精度的离散格式, 并证明离散格式的稳定性 and 收敛性。最后通过数值例子验证了数值方法的可行性与有效性。

[关键词] 时间分数阶扩散方程; 谱延迟校正; Fourier 谱方法; 稳定性; 收敛性

[中图分类号] O 242.1

Numerical Solution of Time Fractional Diffusion Equation Based on Spectral Deferred Correction

YANG Zhengya, CHEN Xuejuan, LIANG Zongqi

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: This paper mainly studies the high-order numerical solution of time fractional diffusion equation. Using Fourier spectral method in space direction and spectral deferred correction method in time direction, a discrete scheme with spectral accuracy in space and time direction is obtained, and the stability and convergence of the scheme are proved. Finally, a numerical example is given to verify the feasibility and effectiveness of the numerical method.

Keywords: time fractional diffusion equation; spectral deferred correction; Fourier spectral method; stability; convergence

0 引言

分数阶偏微分方程是广义、非整数阶的微分方程, 它能够获取在时间和空间上具有幂律内存内核的非局部关系, 这为描述不同物质的记忆和继承性质提供了强有力的工具。分数阶偏微分方程可以大致分为时间分数阶偏微分方程、空间分数阶偏微分方程和时空分数阶偏微分方程。本文研究的时间分数阶扩散方程是由标准的扩散方程用时间分数阶导数代替时间整数阶导数得到的, 可通过考虑非马尔可夫过程中连续时间的随机游走问题导出此方程。其中分数阶导数的物理解释是扩散材料的记忆程度。

对于绝大多数的分数阶微分方程, 很难求得其解析解, 因此转向求解该类方程的数值解。关于时间分数阶扩散方程的数值解法已有不少成果。Lin 等^[1]对该方程在时间上和空间方向上分别采用了有

[收稿日期] 2022-03-28

[基金项目] 福建省自然科学基金项目“非光滑数据下分数阶微分方程的高精度数值算法及其应用研究”(2022J01338); 福建省教育厅项目“基于统计分析与显著性检测的图像处理”(JAT210231)

[作者简介] 通信作者: 陈雪娟 (1976—), 副教授, 硕士生导师, 从事计算数学方向研究。E-mail: 526158149@qq.com

限差分格式和 Legendre 配置法, 并进行了误差估计和稳定性分析, 得到收敛阶为 $O(\Delta T^{2-\alpha})$, 其中 ΔT 为时间步长。Shen 等^[2]利用有效时空法求解时间分数阶偏微分方程, 闵宝峰等^[3]用插值法求解了时间分数阶扩散方程等等。差分格式虽然计算简单并且有高灵活性, 但是精度并不高。同样, 在原方程的解无穷光滑时, 谱方法具有“无穷阶”的收敛速度和逼近精度, 但是该方法仅仅只用在空间上, 时间上的精度并没有提高。

本文利用谱方法将空间离散, 然后采用谱延迟校正法求解时间分数阶扩散方程。该数值格式使得扩散方程在时空方向上都能达到较高的精度。大多数学者将谱延迟校正方法用于求解整数阶的微分方程, 例如 Mao 等^[4]利用半隐式谱延迟校正法求解了两类带非局部项的水波模型, Yoon 等^[5]利用谱延迟校正法处理了多孔介质中的相关问题, Chen 等^[6]利用半隐式谱延迟校正法求解了 Allen-Chahn 方程和 Cahn-Hilliard 方程。而关于分数阶微分方程的谱延迟校正方法的研究成果较少。Lü 等^[7]利用谱延迟校正方法求解分数阶常微分方程, 并说明收敛速度达到了 $O(\Delta t^{(2-\alpha)(p+1)})$ 。栾新等^[8]利用谱延迟校正法求解具有 Caputo 导数的时间分数阶扩散方程的初值问题, 并通过初步的数值实验证明了该方法的有效性和可行性。在处理带 Caputo 导数算子的分数阶微分方程组的初值问题时, 李京^[9]利用谱延迟校正的逐步修正的思想提高数值解的精度。而本文将利用谱延迟校正方法求解时间分数阶偏微分方程, 给出一个快速且精度高的数值逼近格式。

本文考虑的时间分数阶扩散方程为

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha u(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), x \in (0,2\pi), t \in (0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), x \in (0,2\pi), \\ u(x,t) = u(x+2\pi,t), t \in (0,T]. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $f(x,t)$ 为已知函数; $u_{xx} = \partial^2 u / \partial x^2$; $u_0(x)$ 为初值函数; Caputo 分数阶导数定义为 ${}_0^C D_t^\alpha u(x,t) = (1/\Gamma(1-\alpha)) \int_0^t (\partial u(x,s) \cdot 1/(t-s)^\alpha ds, 0 < \alpha \leq 1$ 。

1 分数阶扩散方程的空间离散

利用 Fourier 谱方法对空间进行离散。为了简化符号, 取 $\Lambda = (0,2\pi)$ 。首先, 引入空间: $H_p^1(\Lambda) = \{v \mid v, v' \in L^2(\Lambda), v(x) = v(x+2\pi)\}$; $H^m(\Lambda) = \{v \mid v \in L^2(\Lambda), d^k x / dx^k \in L^2(\Lambda), k \in Z^+, k \leq m\}$ 。其中: $L^2(\Lambda)$ 表示平方可积的可测函数组成的空间, 在 $L^2(\Lambda)$ 空间和 $H_p^1(\Lambda)$ 空间中定义的内积和范数为: $(w,v) = 1/2\pi \cdot \int_0^{2\pi} w \bar{v} dx, \|v\| = \sqrt{(v,v)}, w,v \in L^2(\Lambda); (w,v)_1 = 1/2\pi \cdot \int_0^{2\pi} (w \bar{v} + w' \bar{v}') dx, \|v\| = \sqrt{(v,v)_1}, w,v \in H^1(\Lambda); (w,v)_m = 1/2\pi \cdot \sum_{k=-N/2}^m w^{(k)} \bar{v}^{(k)} dx, \|v\| = \sqrt{(v,v)_m}, w,v \in H^m(\Lambda)$ 。其中: \bar{v} 是 v 的共轭。

取基函数 $v^k = e^{ikx}, k = -N/2, \cdots, N/2$, 定义离散的空间 $U_N = \{v = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{u}_k(t) e^{ikx} : \hat{u}_{-N/2} = \hat{u}_{N/2}\}$, 则方程 (1) 的变分问题为: 求 $u_N \in U_N$, 对 $\forall v_N \in U_N$, 成立

$$(\partial^\alpha u_N / \partial t^\alpha, v_N) - (\partial^2 u_N / \partial x^2, v_N) = (f, v_N). \tag{2}$$

式 (2) 适定性由著名的 Lax-Milgram 引理保证。接下来分析半离散格式的误差估计。

设 $\pi_N^1: H^1(\Lambda) \rightarrow U_N$ 的正交投影算子, 即对于 $\forall \psi \in H^1(\Lambda)$, 定义 $\pi_N^1 \psi \in U_N$, 使得对于 $\forall v_N \in U_N$, 成立 $(\partial^\alpha \pi_N^1 \psi / \partial t^\alpha, v_N) - (\partial^2 \pi_N^1 \psi / \partial x^2, v_N) = (\partial^\alpha \psi / \partial t^\alpha, v_N) - (\partial^2 \psi / \partial x^2, v_N)$, 则有定理 1。

定理 1 对 $\forall u \in H_p^m(\Lambda), 0 \leq \mu \leq m$, 由文献 [10] 可知

$$\|u - u_N\|_\mu \leq c N^{\mu-m} \|u\|_m, u \in PH^m(\Lambda), m \geq 1, \tag{3}$$

旨在考虑 $\|u - u_N\|_1$ 。

证明 设 $u - u_N = (u - \pi_N^1 u) + (\pi_N^1 u - u_N)$ 。根据文献 [11] 可知, 有

$$\|\pi_N^1 u - u_N\|_1 \leq c \|u - \pi_N^1 u\|_m, m \geq 1. \quad (4)$$

那么综合式 (3) 与式 (4), 且由 $\|u\|_m \leq \|u\|_m$ 可得误差估计

$$\|u - u_N\|_1 \leq c N^{1-m} \|u\|_m. \quad (5)$$

其中 c 是一个常数。对 u_N 与 f 作 Fourier 变换得 $u_N(x, t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} (\hat{u}_k(t) e^{ikx}, f(x, t)) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{f}_k e^{ikx}$ 。其中 \hat{u}_k 是 Fourier 系数, 给出

$$\hat{u}_k = (u, e^{ikx}) = 1/2\pi \cdot \int_0^{2\pi} u(x) e^{-ikx} dx. \quad (6)$$

将式 (6) 代入变分问题并整理得 $\sum_{k=-N/2}^{N/2} ((e^{ikx}, v_j)_0^C D_t^\alpha \hat{u}_k(t)) + \sum_{k=-N/2}^{N/2} (k^2 \hat{u}_k(t) (e^{ikx}, v_j)) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{f}_k (e^{ikx}, v_j)$ 。

其中: $v_j = e^{ijx}, j = -N/2, \dots, 0, \dots, N/2$ 。因三角函数系 $\{e^{ikx}\}$ 的正交性质为 $(e^{ikx}, e^{ijx}) = 1/2\pi \cdot \int_0^{2\pi} e^{i(k-j)x} dx = \begin{cases} 1, k=j, \\ 0, k \neq j, \end{cases}$ 则式 (5) 简化为

$${}_0^C D_t^\alpha \hat{u}_k(t) + k^2 \hat{u}_k(t) = \hat{f}_k, k = -N/2, \dots, N/2. \quad (7)$$

将式 (7) 写成矩阵形式 $R_0^C D_t^\alpha \hat{\mathbf{u}}(t) - K \hat{\mathbf{u}}(t) = \hat{\mathbf{f}}(t)$ 。其中: R 是单位矩阵; K 是以 k^2 为元素的对角矩阵; $\hat{\mathbf{u}}(t)$ 和 $\hat{\mathbf{f}}(t)$ 都是 $(N+1) \times 1$ 的向量。

2 分数阶扩散方程的时间离散

谱延迟校正 (SDC) 最早是由 Dutt 等^[12] 为了求解常微分方程而提出的一种高阶稳定的数值方法。该方法的基本思想就是: 将常微分方程求解区间离散为 Gauss-Legendre 网格, 用相应的 Picard 积分方程代替原时间常微分方程, 然后用显式 Euler 或隐式 Euler 方法近似求解积分方程, 并在同一个网格上得到一系列“误差方程”, 将解修正到越来越高的精度。

分数阶扩散方程由上述 Fourier 谱方法进行空间离散后, 得到一个带时间分数阶导数的常微分方程组

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha \hat{\mathbf{u}}(t) = F(t, \hat{\mathbf{u}}(t)), t \in [0, T], \\ \hat{\mathbf{u}}(0) = \hat{\mathbf{u}}_0 \end{cases} \quad (8)$$

其中: $F(t, \hat{\mathbf{u}}(t)) = K \hat{\mathbf{u}}(t) + \hat{f}$, $\hat{\mathbf{u}}_0 \in C^n$; $F: R \times C^n \rightarrow C^n, n \in R$, 并且假设 F 是足够光滑以使得式 (8) 是适定的。将时间区间 $[0, T]$ 划分成 M 个不重叠的子区间: $[0, T] = \cup_{j=0}^{M-1} [t_j, t_{j+1}]$, $t_j = j\Delta T$, ΔT 是每个区间的长度, 将在每个子区间上进行谱延迟校正, 进而阐述谱延迟校正方法是如何在区间 $[t_j, t_{j+1}]$ 上求解的。为了简化符号, 用一般性区间 $[a, b]$ 用来表示区间 $[t_j, t_{j+1}]$ 。

2.1 校对方程

把式 (8) 化成等价的 Picard 积分方程的形式, 对其两边同时进行分数阶积分可得 $\hat{\mathbf{u}}(t) = \hat{\mathbf{u}}_0 + (1/\Gamma(\alpha)) \int_0^t F(\tau, \hat{\mathbf{u}}(\tau)) / (t - \tau)^{1-\alpha} d\tau, t \in [0, T]$, 考虑一般性区间 $[a, b]$, 简化为

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \hat{\mathbf{u}}_a(t) + (1/\Gamma(\alpha)) \int_a^t F(\tau, \hat{\mathbf{u}}(\tau)) / (t - \tau)^{1-\alpha} d\tau, t \in [0, T]. \quad (9)$$

其中: $\hat{\mathbf{u}}(t) = \hat{\mathbf{u}}_0 + (1/\Gamma(\alpha)) \int_0^a F(\tau, \hat{\mathbf{u}}(\tau)) / (t - \tau)^{1-\alpha} d\tau$ 是非局部历史项。假设已经获得式 (9) 的一个近似解 $\hat{\mathbf{u}}^0(t)$, 那么可相应地定义出一个误差函数 $\delta(t) = \hat{\mathbf{u}}(t) - \hat{\mathbf{u}}^0(t)$, 将其代入式 (9) 可得

$$\hat{\mathbf{u}}^0(t) + \delta(t) = \hat{\mathbf{u}}_a(t) + (1/\Gamma(\alpha)) \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} F(\tau, \hat{\mathbf{u}}^0(\tau) + \delta(\tau)) d\tau, \quad (10)$$

另一方面, 也可以定义残差函数为

$$\varepsilon(t, \hat{u}^0(t)) = \hat{u}_a(t) + (1/(\Gamma(\alpha))) \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} F(\tau, \hat{u}^0(\tau)) d\tau - \hat{u}^0(t), \tag{11}$$

结合式 (10) 和式 (11), 可以推导出校正方程为

$$\delta(t) = (1/(\Gamma(\alpha))) \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} [F(\tau, \hat{u}^0(\tau) + \delta(\tau)) - F(\tau, \hat{u}^0(\tau))] d\tau + \varepsilon(t, \hat{u}^0(t)). \tag{12}$$

根据校正方程 (12) 可以相对应求出 一个误差 $\delta(t)$, 将误差与初始值 $\hat{u}^0(t)$ 相加, 即 $\hat{u}^1 = \hat{u}^0(t) + \delta(t)$, 得到第一层的校正值; 然后, 把 \hat{u}^1 作为新的初始值继续进行法代, 直到得到满足精度要求的数值解。

上述校正过程也可以用矩阵的形式来实现。

2.2 谱延迟校正法的矩阵形式

设 $a = s_0, s_1, \cdots, s_p = b$ 是区间 $[a, b]$ 上的 $p + 1$ 个 Legendre-Gauss-Lobatto 点, 且 r_0, r_1, \cdots, r_p 是 $[-1, 1]$ 上的 Legendre-Gauss-Lobatto 点, 则它们的关系为 $s_i = (b - a)r_i/2 + (b + a)/2, i = 0, 1, \cdots, p$ 。设 \hat{u}_i^k 表示 $\hat{u}^k(s_i)$ 的近似解 (同样有 δ_i^k 和 ε_i^k), 其中 k 代表第 k 次法代。为了计算一系列误差 δ_i^k , 从方程 (12) 可知需要通过式 (11) 计算出残差函数 ε_i^k 。设 $F(t, u^k(t))$ 由 Legendre-Gauss-Lobatto 点插值近似, 则 $F_p(t, \hat{u}^k(t)) = I_p F(t, \hat{u}^k(t)) = \sum_{m=0}^p (F_m^k \hat{h}_m(t))$ 。其中: $F_m^k := F(s_m, u^k(s_m)); I_p v(t_j) = v(t_j)$ 是插值算子; $\hat{h}_j(t)$ 是区间 $[a, b]$ 上基于 $p + 1$ 个 Legendre-Gauss-Lobatto 点的插值基函数, 则残差函数 $\varepsilon(s, u^k(s))$ 近似为

$$\varepsilon = u_a + \Delta T^\alpha A F - u k. \tag{13}$$

其中: $\varepsilon^k = [\varepsilon_0^k, \varepsilon_1^k, \cdots, \varepsilon_p^k]^T$; $u_a = [\hat{u}_a(s_0), \hat{u}_a(s_1), \cdots, \hat{u}_a(s_p)]^T$; $F^k = [F_0^k, F_1^k, \cdots, F_p^k]^T$; $u^k = [\hat{u}_0^k, \hat{u}_1^k, \cdots, \hat{u}_p^k]^T$; $A = I_N \otimes A$ 是一个 $N(p + 1) \times N(p + 1)$ 块对角矩阵, I_N 是一个 $N \times N$ 的单位矩阵。 A 叫做谱积分矩阵, 给出形式 $A_{ij} = (1/2^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)) \int_{-1}^{r_i} (r_i - r)^{\alpha-1} h_j(r) dr$ 。其中: $\hat{h}_j(r)$ 是区间 $[-1, 1]$ 上基于 $p + 1$ 个 Legendre-Gauss-Lobatto 点的插值基函数。

推导线性问题的矩阵形式的法代的表达式为 $F(t, \hat{u}(t)) = K \hat{u}(t) + \hat{f}(t)$, 其中 $K \in R^n$ 且每个分量都是常数, 则校正方程 (12) 化为

$$\delta(t) = (1/\Gamma(\alpha)) \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} K \delta(\tau) d\tau + \varepsilon(t), \tag{14}$$

对于第 k 步修正, 利用向后 Euler 格式, 并注意到 $\delta_0^k = \varepsilon_0^k = 0$, 可得 $\delta_i^k = (1/\Gamma(\alpha + 1)) \sum_{l=1}^i K \tilde{s}_{i,l}^\alpha \delta_l^k + \varepsilon_i^k, i = 1, \cdots, p$ 。其中: $\tilde{s}_{i,l}^\alpha = (s_i - s_{l-1})^\alpha - (s_i - s_l)^\alpha, 1 \leq l \leq i$ 。

将式 (14) 写为矩阵形式如下:

$$(I - \Delta T^\alpha \tilde{A} K \delta) = \varepsilon^k. \tag{15}$$

其中: $\delta^k = [\delta_0^k, \delta_1^k, \cdots, \delta_p^k]$; $\varepsilon^k = [\varepsilon_0^k, \varepsilon_1^k, \cdots, \varepsilon_p^k]$; $K = I_{p+1} \otimes K$; $\tilde{A} = A \otimes I_N$ 且矩阵为

$$\Delta T^\alpha \tilde{A} = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \alpha} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{s}_{1,1}^\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{s}_{2,1}^\alpha & \tilde{s}_{2,2}^\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{s}_{p-1,1}^\alpha & \tilde{s}_{p-1,2}^\alpha & \cdots & \tilde{s}_{p-1,p-1}^\alpha & 0 \\ 0 & \tilde{s}_{p,1}^\alpha & \tilde{s}_{p,2}^\alpha & \cdots & \tilde{s}_{p,p-1}^\alpha & \tilde{s}_{p,p}^\alpha \end{pmatrix}.$$

类似的, 对于显示 Euler 格式, 矩阵 $\Delta T^\alpha \tilde{A}$ 可给出形式

$$\Delta T^\alpha \tilde{A} = \frac{1}{(\Gamma(\alpha) \cdot \alpha)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{s}_{1,1}^\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{s}_{2,1}^\alpha & \tilde{s}_{2,2}^\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{s}_{p-1,1}^\alpha & \tilde{s}_{p-1,2}^\alpha & \cdots & \tilde{s}_{p-1,p-1}^\alpha & 0 & 0 \\ \tilde{s}_{p,1}^\alpha & \tilde{s}_{p,2}^\alpha & \cdots & \tilde{s}_{p,p-1}^\alpha & \tilde{s}_{p,p}^\alpha & 0 \end{pmatrix} \circ$$

假设已经获得到了一个临时解 \mathbf{u}^k , 则利用方程 (15) 有 $\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \boldsymbol{\delta}^k = \mathbf{u}^k + (I - \Delta T^\alpha \tilde{A} \mathbf{K})^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^k$, 通过该式和式 (13), 可以推出

$$\mathbf{u}^{k+1} = (I - \Delta T^\alpha \tilde{A} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{u}_a + \mathbf{C} \mathbf{u}^k + (I - \Delta T^\alpha \tilde{A} \mathbf{K})^{-1} \Delta T^\alpha \mathbf{A} \mathbf{f}. \quad (16)$$

其中 \mathbf{C} 称为“校正矩阵”, 公式为

$$\mathbf{C} = (I - \Delta T^\alpha \tilde{A} \mathbf{K})^{-1} \Delta T^\alpha (\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}) \mathbf{K}. \quad (17)$$

因此, 用 k 代替 $k+1$, 得到

$$\mathbf{u}^k = (I - \Delta T^\alpha \tilde{A} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{u}_a + \mathbf{C} \mathbf{u}^{k-1} + (I - \Delta T^\alpha \tilde{A} \mathbf{K})^{-1} \Delta T^\alpha \mathbf{A} \mathbf{f}. \quad (18)$$

用式 (16) 减去式 (18), 得到递推关系: $\boldsymbol{\delta}^k = \mathbf{C} \boldsymbol{\delta}^{k-1} = \mathbf{C}^k \boldsymbol{\delta}^0$ 。因此, 有 Neumann 级数展开式给出的第 k 次校正后的解为

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{u}^0 + \sum_{i=0}^{K-1} \mathbf{C}^i \boldsymbol{\delta}^0. \quad (19)$$

同样, 通过在 Gauss 型配点处离散方程 (14) 可以得到上述 Neumann 级数展开式。特别的, 有

$$(I - \Delta T^\alpha \mathbf{A} \mathbf{K}) \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (20)$$

其中 \mathbf{A} 可以由式 (13) 得到。SDC 方法是用求解式 (15) 得到的低阶近似值 $\boldsymbol{\delta}^k$ 通过法代来逼近上述系统。在式 (20) 左右两端同时乘以 $(I - \Delta T^\alpha \tilde{A} \mathbf{K}^{-1})$, 可以得到如下预处理系统 $(I - \Delta T^\alpha \tilde{A} \mathbf{K})^{-1} (I - \Delta T^\alpha \mathbf{A} \mathbf{K}) \boldsymbol{\delta} = (I - \Delta T^\alpha \tilde{A} \mathbf{K})^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\delta}^0$ 。通过整理得 $(I - \mathbf{C}) \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}^0$ 。其中 \mathbf{C} 是式 (17) 给出的, 并且注意到当 $\lambda \Delta T$ 很小时, $\tilde{\mathbf{A}}$ 是 \mathbf{A} 的低阶近似, 那么上述线性系统的解由 Neumann 级数展开式给出 $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}^0 + \mathbf{C} \boldsymbol{\delta} (\boldsymbol{\delta}^0 + \mathbf{C} \boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{\delta}^0 + \mathbf{C} \boldsymbol{\delta}^0 + \mathbf{C}^2 \boldsymbol{\delta} = \cdots = \boldsymbol{\delta}^0 + \mathbf{C} \boldsymbol{\delta}^0 + \mathbf{C}^2 \boldsymbol{\delta}^0 + \cdots$, 它和式 (19) 是等价的。这意味着 SDC 方法等价于求解由低阶近似系统式 (15) 预处理的谱配置系统式 (20)。

通过谱延迟校正方法, 求得数值解, 对此数值解做 Fourier 逆变换, 可得到原问题的解。

2.3 稳定性和收敛性分析

对 SDC 格式的稳定性 and 收敛性进行分析, 假设得到了 SDC 方法的解在每个子区间上关于 p 次多项式的误差估计, 设 $\hat{u}_p(t)$ 是 SDC 校正过程得到的近似解, 则其满足

$$\hat{u}_p(t) = \hat{u}_0(t) + (1/\Gamma(\alpha)) \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} I_p F(\tau) d\tau, t \in [a, b]. \quad (21)$$

利用式 (21) 与式 (8), 可得到 $|\hat{u}(t) - \hat{u}_p| = (1/\Gamma(\alpha)) \left| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (F - I_p F)(\tau) d\tau \right| \leq (T^\alpha / (\Gamma(1+\alpha))) \|F - I_p F\|_\infty$ 。那么借助文献 [13] 中的 (4.11) 式, 则误差估计如下定理。

定理 2 假设 $F(t) \in H^m([a, b])$, 并设 $\hat{u}(t)$ 和 $\hat{u}_p(t)$ 分别是式 (8) 和式 (21) 的解, 则成立

$\|\hat{u}(t) - \hat{u}_p\|_\infty \leq C T^\alpha p^{1/2-m} \|F(t)\|_\infty$, 说明收敛性仅仅依赖于 F 相对于 t 的正则性。

节 2.2 提到 SDC 方法等价于求解由低阶近似系统 (15) 预处理的谱配置系统 (20), 因此有如下定理 3。

定理 3 对于线性分数阶常微分方程系统, SDC 方法是稳定的, 当且仅当式 (17) 给出的校正矩阵 \mathbf{C} 的谱半径小于 1, 即 $\rho(\mathbf{C}) < 1$ 。

因此, 用谱延迟校正法将分数阶扩散方程的时间部分进行离散后, 得到了时间分数阶扩散方程的全离散格式, 并证明和分析了其收敛性和稳定性, 说明数值方法是可行的。

3 数值实验

例 1 考虑方程式 (1), 设其具有精确解 $u(x,t) = t^{5+\alpha}e^{\sin x}$, 相应的右端项和初值条件分别为: $f(x,t) = (\Gamma(6+\alpha))/(\Gamma(6))t^5e^{\sin x} + t^{5+\alpha}e^{\sin x}$; $u_0(x) = 0$ 。图 1 给出了当 $p=7$ 且对应不同 N 与 α 时, 数值解与精确解的误差图, 由于精确解是足够光滑的, 因此用谱方法对空间进行离散, 其精度可以呈指数收敛。图 2 给出了当 $N=32$ 且对应不同 p 与 α 时, 数值解与精确解的最大绝对误差, 可以看到, 利用谱延迟校正法, 当 p 取较小的数值时, 其精度同样可以呈指数收敛从而很快达到谱精度。

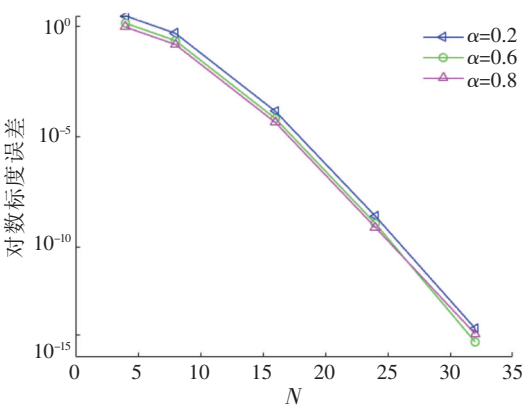


图 1 $p=7$ 时对应不同 N 时的误差图

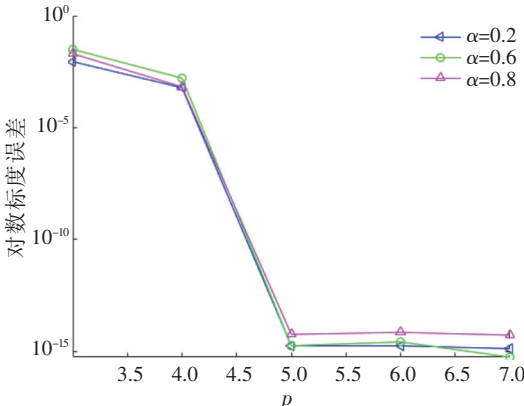


图 2 $N=32$ 时对应不同 p 时的误差图

Fig.1 Error cruves corresponding to different N for $p=7$ Fig.2 Error cruves corresponding to different p for $N=32$

例 2 例 1 中考虑了足够光滑的精确解, 为了验证数值格式的有效性和可行性, 接下来考虑非光滑形式的情形。设其具有精确解 $u(x,t) = t^{5.1+\alpha}e^{\sin x}$, 相应的右端项和初值条件分别为: $f(x,t) = (\Gamma(6.1+\alpha))/(\Gamma(6.1))t^{5.1}e^{\sin x} + t^{5.1+\alpha}e^{\sin x}$; $u_0(x) = 0$ 。图 3 给出了 p 固定且对应不同 α 时, 数值解与精确解的误差图, 相比于例 1, 此时精确解的正则性较低, 所以此时取 $p=30$ 时, 其精度才可以达到谱精度。图 4 给出了当 $N=32$ 且对应不同 α 时, 数值解与精确解的最大绝对误差, 对比例 1 可以看到, 误差的精度收敛较为缓慢。因为精确解的非光滑性, 使得方程右端项的正则性发生变化, 因此只能收敛到代数精度而无法呈现指数收敛达到谱精度。

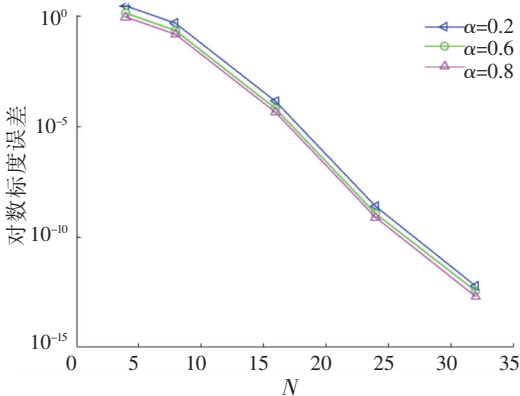


图 3 $p=30$ 时对应不同 N 时的误差图

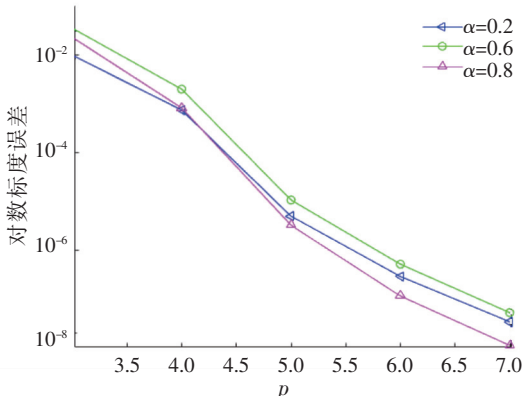


图 4 $N=32$ 时对应不同 p 时的误差图

Fig.3 Error cruves corresponding to different N for $p=30$ Fig.4 Error cruves corresponding to different p for $N=32$

4 结论

针对时间分数阶扩散方程,分别采用了 Fourier 谱方法和谱延迟校正方法处理空间和时间部分,并证明了格式的稳定性 and 收敛性。同时,在证明稳定性的过程中,通过法代的方法构造了谱延迟校正方法的“校正矩阵”,通过判断“校正矩阵”的谱半径更容易证明格式的稳定性。另外,在构造 SDC 矩阵形式的过程中,表明 SDC 方法等价于求解由低阶近似系统 (15) 预处理的谱配置系统 (20)。在最后的数值例子中表明,对于分数阶偏微分方程时间部分的处理,相对于以往的方法 (如差分) 而言,其精度可以达到谱精度。但值得注意的是,其精度不仅与所用的格式有关,同样与原方程的精确解以及右端项的正则性有关。

[参 考 文 献]

- [1] LIN Y, XU C. Finite difference/spectral approximations for the time-diffusion equations[J]. *Computation Physics*, 2007, 255: 1533-1552.
- [2] SHEN J, SHENG C. An efficient space-time method for time fractional diffusion equation[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2019, 81(2): 1088-1110.
- [3] 闵宝峰, 张学莹. 插值法解时间分数阶扩散方程[J]. *陕西师范大学学报(自然科学版)*, 2018, 46(3): 55-59.
- [4] MAO Z, SHEN J. A semi-implicit spectral deferred correction method for two water wave models with nonlocal viscous term and numerical study of their decay rates[J]. *Science China Mathematics*, 2015, 45(8): 1153-1168.
- [5] YOON H C, KIM J. Spectral deferred correction methods for high order accuracy in poroelastic problems[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2021, 45(18): 2709-2731.
- [6] LIU F, SHEN J. Stabilized semi-implicit spectral deferred correction methods for Allen-Cahn and Cahn-Hilliard equations[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2015, 38(18): 4564-4575.
- [7] LÜ C, AZAIEZ M, XU C. Spectral deferred correction methods for fractional differential equations[J]. *Numerical Mathematics: Theory Methods Applications* 2018, 11(4): 729-751.
- [8] 栾新, 辛佳, 宋大雷, 等. 分数阶微分方程组的一种高精度数值算法[J]. *系统仿真学报*, 2018, 30(2): 421-426.
- [9] 李京. 分数阶微分方程的高精度数值算法研究[D]. 青岛: 青岛大学, 2015.
- [10] SHEN J, TANG T, WANG L L. *Spectral methods*[M]. Berlin: Springer, 2011.
- [11] 向新民. 谱方法的数值分析[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- [12] DUTT A, GREENGARD L, ROKHLIN V. Spectral deferred correction methods for ordinary differential equations[J]. *BIT Numerical Mathematics*, 2000, 40(2): 241-266.
- [13] CHEN Y, LI X, TANG T. A note on Jacobi spectral-collocation methods for weakly singular volterra integral equations with smooth solutions[J]. *Journal of Computational Mathematics*, 2013, 31(1): 47-56.

(责任编辑 彭海滨 英文审校 黄振坤)