

# 树线图的最大匹配数

叶银珠, 陈海燕

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

**[摘要]** 设  $T$  是  $n$  个顶点的树, 令  $\text{Max}(L(T))$  表示  $T$  的线图  $L(T)$  最大匹配的数目。当  $n$  是奇数时,  $\text{Max}(L(T))$  就是  $L(T)$  的完美匹配数。当  $n$  是偶数时, 研究线图  $L(T)$  的最大匹配, 给出其最大匹配所含的边数, 得到最大匹配数  $\text{Max}(L(T))$  的一个一般表达式。作为应用, 得到了一些特殊的毛毛虫树和三元树线图最大匹配数的具体表达式。

**[关键词]** 最大匹配; 线图; 树; 毛毛虫树; 三元树

**[中图分类号]** O 157.5

## On the Number of Maximum Matchings in the Line Graph of a Tree

YE Yinzhu, CHEN Haiyan

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** Let  $T$  be a tree with  $n$  vertices, and let  $\text{Max}(L(T))$  denote the number of maximum matchings in the line graph of  $T$ . When  $n$  is odd,  $\text{Max}(L(T))$  is the number of perfect matchings of  $L(T)$ . In this paper, the maximum matchings of  $L(T)$  for even  $n$  were studied. The number of edges in a maximum matching was firstly determined, and then a general expression for  $\text{Max}(L(T))$  was given. As applications, for some special caterpillar trees and ternary trees, explicit expressions of  $\text{Max}(L(T))$  were got.

**Keywords:** maximum matching; line graph; tree; caterpillar tree; ternary tree

## 0 引言

本文考虑的图都是有限的、无向简单图。令  $G = (V, E)$  是顶点数为  $n$ 、边数为  $m$  的图, 对于  $v \in V$ ,  $d_G(v)$  表示  $v$  的度,  $\Delta(G)$  表示图  $G$  的最大度。若  $d_G(v) = 1$ , 则称  $v$  为  $G$  的悬挂点, 其关联的边称为悬挂边。如果  $M$  中没有两条边关联同一个顶点, 则边子集  $M \subseteq E$  称为  $G$  的一个匹配。和  $M$  中的边关联的顶点称为  $M$  饱和的, 否则称为  $M$  非饱和的。饱和图  $G$  的每一个顶点的匹配称为完美匹配, 完美匹配数用  $M(G)$  表示。注意到并不是所有的图都存在完美匹配, 如奇数个顶点的图肯定不存在完美匹配, 因此完美匹配自然的推广就是最大匹配, 即  $G$  所含边数最多的匹配。图  $G$  中最大匹配的个数用  $\text{Max}(G)$  表示, 则  $\text{Max}(G) \geq 1$ 。显然, 若图  $G$  含有完美匹配, 则其最大匹配就是完美匹配, 这时  $\text{Max}(G) = M(G)$ ; 反之则不然。本文主要考虑树的线图的最大匹配数。图的匹配及其计数是图论中一个经典热门的研究课题<sup>[1]</sup>, 它不仅在图论和计算科学中起着重要的作用, 而且在统计物理和量子化学中也占有重要的地位。在统计物理学中, 匹配被称为 Monomer-dimer 构型<sup>[2]</sup>; 在量子化

**[收稿日期]** 2022-06-27

**[基金项目]** 国家自然科学基金项目“图的极限及其动力学行为”(11771181)“有关树的若干计数问题的研究”(12071180)

**[作者简介]** 通信作者: 陈海燕 (1970—), 教授, 博导, 从事组合图论方向研究, E-mail: chey5@jmu.edu.cn。

<http://xuebaobangong.jmu.edu.cn/zkb>

学中, Kekulé 结构<sup>[3-5]</sup>就是对应分子图的完美匹配。众所周知, 最大匹配的计数是一个 NP-hard 问题<sup>[6-7]</sup>, 所以对一些特殊图类给出其最大匹配数的显式表达式是一项非常有意义的工作。下面首先给出本文所需要的一些概念和引理。

给定一个图  $G = (V, E)$ , 图  $G$  的线图用  $L(G)$  表示, 它是顶点集  $V(L(G)) = E(G)$  的图, 其中  $L(G)$  中的顶点  $e$  和  $f$  相邻, 当且仅当  $e$  和  $f$  是  $G$  中相邻的边。由线图的定义,  $L(G)$  的顶点数等于图  $G$  的边数。连通无圈的图称为一棵树。为方便起见, 约定空图 (即没有边的图) 的线图完美匹配数为 1。

设  $T$  是  $n$  个顶点的一棵树, 当  $n$  是奇数时, 即  $T$  的边数  $n - 1$  为偶数, 这时文献 [8-9] 首先证明  $L(T)$  至少有一个完美匹配。而后文献 [10] 给出  $\text{Max}(L(T)) = M(L(T))$  的具体表达式。对于任意一个连通图  $G$ , 当  $m - n + 1 > 0$  时, 文献 [1, 8-9] 证明了  $M(L(G))$  可以表示成  $2^{m-n+1}$  棵树  $T$  的  $M(L(T))$  的和。在此基础上, 他们得到了  $M(L(G))$  的两个下界, 其中一个是  $M(L(G)) \geq 2^{m-n+1}$ , 同时给出了  $M(L(G)) = 2^{m-n+1}$  的充分必要条件。文献 [11] 进一步得到了和度有关的  $M(L(G))$  的另一个下界, 文献 [12] 给出了  $M(L(G)) = 2^{m-n+1} + 2$  的充分必要条件。当  $n$  是偶数时, 很显然  $M(L(T)) = 0$ , 但  $\text{Max}(L(T)) \neq 0$ , 下面将给出  $\text{Max}(L(T))$  的具体表达式。

给定任何整数  $k \geq -1$ , 文中定义  $(2k)!! = (2k-1)!! = (2k-1) \cdot (2k-3) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 1$ , 其中  $0!! = (-1)!! = 1$ 。

**引理 1**<sup>[1]</sup> 设  $T$  是顶点集为  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  的一棵树, 其中  $n > 1$  且为奇数, 那么  $M(L(T)) = \prod_{i=1}^n p(T-v_i)!!$ , 其中  $p(T-v_i)$  表示  $T-v_i$  中具有偶数条边的分支数。

**引理 2**<sup>[1]</sup> 设  $T$  是顶点数为  $n$  的一棵树, 其中  $n > 1$  且为奇数, 那么  $M(L(T)) \geq 1$ , 等式成立当且仅当对  $T$  中每个顶点  $v$ , 有  $p(T-v) = 0$  或 2。

**引理 3**<sup>[1]</sup> 设  $T$  是有奇数个顶点的一棵树, 若  $\Delta(T) \leq 3$ , 那么  $M(L(T)) = 1$ 。

## 1 结果及其证明

设  $T$  是  $n$  个顶点的一棵树, 令  $L$  表示树  $T$  中所有悬挂边的集合,  $l = |L|$ 。对任意  $e \in E(T)$ ,  $T-e = T_e^1 \cup T_e^2$ ,  $T_e^1$ 、 $T_e^2$  分别表示  $T-e$  的两个树分支。注意到, 若  $M_1$  是  $L(T_e^1)$  的一个匹配,  $M_2$  是  $L(T_e^2)$  的一个匹配, 则  $M_1 \cup M_2$  是  $L(T)$  的一个匹配, 所以可得到定理 1 和定理 2。

**定理 1** 设  $T$  是  $n$  个顶点的一棵树, 且  $n$  为偶数, 则线图  $L(T)$  最大匹配所含的边数为  $n/2 - 1$ 。

**证明** 一方面, 由于  $L(T)$  的顶点数  $n-1$  为奇数, 所以它的最大匹配所含的边数至多为  $n/2 - 1$ 。另一方面, 对任意  $e \in L$ ,  $T-e$  其中一个分支为  $n-1$  个顶点的树, 不妨设为  $T_e^1$ , 则由引理 2,  $L(T_e^1)$  含有完美匹配, 即边数至少为  $n-1$  的匹配, 所以  $L(T)$  最大匹配所含的边数至少为  $n-1$ 。结论得证。

下面如果没有特殊说明, 都约定  $n$  为偶数。在此约定下, 很容易看出, 对任意  $e \in E(T)$ ,  $T_e^1$ 、 $T_e^2$  中所含的边数具有同样的奇偶性, 所以有划分  $E(T) = \varepsilon \cup O$ , 其中  $\varepsilon = \{e | e \in E(T), |E(T_e^1)| \equiv |E(T_e^2)| \equiv 0 \pmod{2}\}$ ,  $O = \{e | e \in E(T), |E(T_e^1)| \equiv |E(T_e^2)| \equiv 1 \pmod{2}\}$ 。

**定理 2** 设  $T$  是  $n$  个顶点的一棵树, 且  $n$  为偶数, 则  $\text{Max}(L(T)) = \sum_{e \in \varepsilon} [M(L(T_e^1))M(L(T_e^2))]$ 。

**证明** 由定理 1, 线图  $L(T)$  最大匹配所含的边数为  $n/2 - 1$ , 即  $L(T)$  的每一个最大匹配恰好不饱和其一个顶点, 所以有

$$\text{Max}(L(T)) = \sum_{e \in E} \text{Max}_e(L(T)). \quad (1)$$

其中:  $\text{Max}_e(L(T))$  表示  $L(T)$  不饱和顶点  $e$  的最大匹配数。又对任意的  $M \in \text{Max}_e(L(T))$ ,  $M \cap E(L(T_e^1))$  一定是  $L(T_e^1)$  的一个完美匹配。同理  $M \cap E(L(T_e^2))$  一定是  $L(T_e^2)$  的一个完美匹配。当  $e \in O$  时,  $L(T_e^1)$  和  $L(T_e^2)$  没有完美匹配, 所以这时

$$\text{Max}_e(L(T)) = 0. \quad (2)$$

当  $e \in \mathcal{E}$  时, 由上可得, 任意的  $M \in \text{Max}_e(L(T))$  可以表示成  $L(T_e^1)$  中一个完美匹配和  $L(T_e^2)$  中一个完美匹配的并集。反过来,  $L(T_e^1)$  的任一个完美匹配和  $L(T_e^2)$  中任一个完美匹配并起来就得到  $\text{Max}_e(L(T))$  中的一个匹配, 所以

$$\text{Max}_e(L(T)) = M(L(T_e^1))M(L(T_e^2)). \quad (3)$$

由式(1)~式(3), 结论得证。

由定理2, 可以得到下面的推论1~推论3。

**推论1** 设  $T$  是  $n$  个顶点的一棵树, 且  $n$  为偶数, 则  $\text{Max}(L(T)) \geq |\mathcal{E}|$ , 其中等号成立当且仅当对任意  $e \in \mathcal{E}$ ,  $M(L(T_e^1)) = M(L(T_e^2)) = 1$ 。特别地, 有  $\text{Max}(L(T)) \geq l_0$ 。

**证明** 由引理2, 定理2中求和的每一项至少为1, 所以  $\text{Max}(L(T)) \geq |\mathcal{E}|$ , 等号成立的条件是显然的。对特别的部分, 注意到对任意的  $e \in L$ , 显然有  $e \in \mathcal{E}$ , 所以  $\text{Max}(L(T)) \geq |\mathcal{E}| \geq l_0$ 。

**推论2** 对偶数个顶点的路  $P_n = v_1v_2 \cdots v_n$ , 有  $\text{Max}(L(P_n)) = n/2$ 。

**证明** 对路  $P_n = v_1v_2 \cdots v_n$ , 易得  $\mathcal{E} = \{e_1 = v_1v_2, e_2 = v_3v_4, \cdots, e_{n/2} = v_{n-1}v_n\}$ 。又  $\Delta(P_n) \leq 3$ , 由引理3, 推论1中的等号成立, 所以结论得证。

**推论3** 对偶数个顶点的星  $S_{1,n-1}$ , 有  $\text{Max}(S_{1,n-1}) = (n-1)!!$ 。

**证明** 星  $S_{1,n-1}$  的每一条边都是悬挂边, 所以  $\mathcal{E} = E$ 。又对任意  $e \in E(S_{1,n-1})$ , 去掉  $e$  其中一个分支的线图为  $n-2$  个顶点的完全图  $K_{n-2}$ , 另一个分支为孤立点, 其线图的完美匹配数约定为1。所以由定理2,  $\text{Max}(L(S_{1,n-1})) = (n-1)M(K_{n-2}) = (n-1)(n-3)!! = (n-1)!!$ 。

下面考虑双星  $T = T(t_1, t_2)$ , 其顶点数  $n = t_1 + t_2 + 2$ 。首先当  $n$  是奇数时, 由引理1可得

$$M(L(T(t_1, t_2))) = t_1!!t_2!! \quad (4)$$

结合式(4)、定理1和定理2, 可得推论4。

**推论4** 对偶数个顶点的双星  $T = T(t_1, t_2)$ ,  $n = t_1 + t_2 + 2$ , 有: 1) 若  $t_1, t_2$  都是偶数, 则  $\text{Max}(L(T(t_1, t_2))) = (n-1)t_1!!t_2!!$ ; 2) 若  $t_1, t_2$  都是奇数, 则  $\text{Max}(L(T(t_1, t_2))) = 2t_1!!t_2!!$ 。

**证明** 设  $v_1, v_2$  是双星  $T = T(t_1, t_2)$  的两个中心, 令  $L_1$  表示与  $v_1$  相关联的  $t_1$  条悬挂边的集合,  $L_2$  表示与  $v_2$  相关联的  $t_2$  条悬挂边的集合,  $f = v_1v_2$ 。对任意的  $e \in L_1(L_2)$ , 有  $T_1 = T(t_1 - 1, t_2)(T(t_1, t_2 - 1))$ ,  $T_e^1$  为孤立点, 而  $T_f^1 = S_{1,t_1}$ ,  $T_f^2 = S_{1,t_2}$ 。

1) 若  $t_1, t_2$  都是偶数, 此时  $\mathcal{E} = L_1 \cup L_2 \cup \{f\}$ , 由式(4),  $\sum_{e \in L_1} [M(L(T_e^1))M(L(T_e^2))] = t_1(t_1 - 1)!!t_2!! = t_1t_1!!t_2!!$ ,  $\sum_{e \in L_2} [M(L(T_e^1))M(L(T_e^2))] = t_2t_1!!(t_2 - 1)!! = t_2t_1!!t_2!!$ ,  $M(L(T_f^1))M(L(T_f^2)) = t_1!!t_2!!$ , 所以  $\sum_{e \in \mathcal{E}} [M(L(T_e^1))M(L(T_e^2))] = (n-1)t_1!!t_2!!$ 。

2) 若  $t_1, t_2$  都是奇数, 此时  $\mathcal{E} = L_1 \cup L_2$ ,  $\sum_{e \in L_1} [M(L(T_e^1))M(L(T_e^2))] = t_1(t_1 - 1)!!t_2!! = t_1!!t_2!!$ ,  $\sum_{e \in L_2} [M(L(T_e^1))M(L(T_e^2))] = t_2t_1!!(t_2 - 1)!! = t_1!!t_2!!$ 。

由1)和2), 结论证毕。

## 2 应用例子

一棵毛毛虫树  $T = T(t_1, t_2, \cdots, t_k)$  是在路  $P_k = v_1v_2 \cdots v_k$  的点  $v_i$  上分别悬挂  $t_i$  个悬挂点所得到的树。当  $n = k + t_1 + \cdots + t_k$  是奇数时, 其线图的最大匹配数等于其完美匹配数。

**引理4** 设  $T = T(t_1, t_2, \cdots, t_k)$  是一棵毛毛虫树, 且  $n = k + t_1 + \cdots + t_k$  是奇数。令  $m_i = \sum_{j=1}^{i-1} t_j + i$ ,

$i = 1, \dots, k$ , 则有  $M(L(T)) = \prod_{i=1}^k p(T-v_i)!!$ , 其中:  $p(T-v_i) = \begin{cases} t_i + 1, & t_i \text{ 是奇数,} \\ t_i, & t_i \text{ 是偶数且 } m_i \text{ 是奇数,} \\ t_i + 2, & t_i \text{ 是偶数且 } m_i \text{ 是偶数.} \end{cases}$

**证明** 注意到  $p(T-v_i)$  是  $T-v_i$  中具有偶数条边的分支数。为更清楚, 分 2 种情况进行讨论。

1) 若  $i = 1$  或  $k$ , 那么  $T-v_i$  有  $t_i + 1$  个分支, 其中  $t_i$  个分支都是孤立点, 剩下 1 个分支一共有  $n - t_i - 2$  条边。因此  $p(T-v_i) = \begin{cases} t_i, & t_i \text{ 是偶数,} \\ t_i + 1, & t_i \text{ 是奇数.} \end{cases}$

2) 若  $1 < i < k$ , 那么  $T-v_i$  有  $t_i + 2$  个分支, 其中  $t_i$  个分支都是孤立点, 剩下 2 个分支分别有  $m_i - 2 \equiv m_i \pmod{2}$  和  $n - t_i - m_i - 1 = t_i + m_i \pmod{2}$  条边。若  $t_i$  是奇数, 那么  $m_i$  和  $t_i + m_i$  其中一个为偶数, 所以  $p(T-v_i) = t_i + 1$ 。

若  $t_i$  是偶数且  $m_i$  是奇数, 因为  $m_i$  和  $t_i + m_i$  都是奇数, 那么  $p(T-v_i) = t_i$ 。同理可得, 若  $t_i$  和  $m_i$  都是偶数, 那么  $p(T-v_i) = t_i + 2$ 。由 1) 和 2), 结论得证。

现在讨论顶点数为偶数的毛毛虫树线图的最大匹配数。为方便起见, 下面用  $L_i (1 \leq i \leq k)$  表示悬挂在顶点  $v_i$  上的  $t_i$  条悬挂边的集合, 路  $P_k$  上边的集合为  $\{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}\}$ 。对任意的  $e \in \bigcup_{i=1}^k L_i$ , 都约定  $T_e^2$  对应孤立点的分支, 即有  $M(L(T_e^2)) = 1$ , 所以这时只需计算  $M(L(T_e^1))$ 。

**定理 3** 设  $T = T(t_1, t_2, \dots, t_k)$  是偶数个顶点的一棵毛毛虫树。若  $t_1, t_2, \dots, t_k$  都是奇数, 则

$$\text{Max}(L(T)) = k \prod_{i=1}^k t_i!!。$$

**证明** 因为  $t_1, t_2, \dots, t_k$  都是奇数, 得到  $E = \bigcup_{i=1}^k L_i$ 。若  $e \in L_i$ , 则有  $T_e^1 = T(t_1, \dots, t_{i-1}, t_i - 1, t_{i+1}, \dots, t_k)$ , 由引理 4 得,  $M(L(T_e^1)) = t_1!! \cdots t_{i-1}!! (t_i - 1)!! t_{i+1}!! \cdots t_k!!$ 。所以由定理 2,  $\text{Max}(L(T)) = \sum_{i=1}^k \sum_{e \in L_i} [M(L(T_e^1)) M(L(T_e^2))] = \sum_{i=1}^k [t_i t_1!! \cdots t_{i-1}!! (t_i - 1)!! t_{i+1}!! \cdots t_k!!] = \sum_{i=1}^k \prod_{j=1}^k t_j!! = k \prod_{j=1}^k t_j!!$ 。

**定理 4** 设  $T = T(t_1, t_2, \dots, t_k)$  是偶数个顶点的一棵毛毛虫树。若  $t_1, t_2, \dots, t_k$  都是偶数, 则

$$\text{Max}(L(T)) = N_1 \sum_{i=1}^{k/2} (1 + t_{2i-1} + t_{2i}) \prod_{j=1}^{i-1} [(t_{2j} + 1)/(t_{2j+1} + 1)], \text{ 其中 } N_1 = t_1!! t_2!! (t_3 + 2)!! t_4!! (t_5 + 2)!! \cdots (t_{k-1} + 2)!! t_k!!。$$

**证明** 由  $t_1, t_2, \dots, t_k$  都是偶数, 可得  $k$  是偶数, 此时  $\varepsilon = \bigcup_{i=1}^k L_i \cup \{e_1, e_3, \dots, e_{k-1}\}$ 。若  $e \in L_i$ , 则有  $T_e^1 = T(t_1, \dots, t_{i-1}, t_i - 1, t_{i+1}, \dots, t_k)$ 。

由引理 4, 当  $i = 2j - 1 (1 \leq j \leq k/2)$  为奇数时, 有  $M(L(T_e^1)) = t_1!! (t_2 + 2)!! t_3!! \cdots (t_{i-1} + 2)!! t_i!! t_{i+1}!! (t_{i+2} + 2)!! \cdots (t_{k-1} + 2)!! t_k!!$ ; 当  $i = 2j (1 \leq j \leq k/2)$  为偶数时, 有  $M(L(T_e^1)) = t_1!! (t_2 + 2)!! t_3!! \cdots t_{i-1}!! t_i!! (t_{i+1} + 2)!! t_{i+2}!! \cdots (t_{k-1} + 2)!! t_k!! = t_1!! (t_2 + 2)!! t_3!! \cdots (t_{2j-2} + 2)!! t_{2j-1}!! t_{2j}!! (t_{2j+1} + 2)!! t_{2j+2}!! \cdots (t_{k-1} + 2)!! t_k!!$ 。用  $N_j (1 \leq j \leq k/2)$  表示上面的表达式, 则有:  $N_{j+1}/N = (t_{2j} + 1)/(t_{2j+1} + 1)$ ;

$$\sum_{e \in \bigcup_{i=1}^k L_i} [M(L(T_e^1)) M(L(T_e^2))] = \sum_{i=1}^{k/2} [(t_{2i-1} + t_{2i}) N_i] = N_1 \sum_{i=1}^{k/2} (t_{2i-1} + t_{2i}) \prod_{j=1}^{i-1} [(t_{2j} + 1)/(t_{2j+1} + 1)]。$$

又对任意  $e_{2j-1} (1 \leq j \leq k/2)$ , 有  $T_{e_{2j-1}}^1 = T(t_1, \dots, t_{2j-1})$ ,  $T_{e_{2j-1}}^2 = T(t_{2j}, \dots, t_k)$ , 再由引理 4 得,  $M(L(T_{e_{2j-1}}^1)) M(L(T_{e_{2j-1}}^2)) = t_1!! (t_2 + 2)!! t_3!! \cdots t_{2j-1}!! t_{2j}!! (t_{2j+1} + 2)!! \cdots t_k!! = N_j$ 。所以,  $\sum_{j=1}^{k/2} N_j =$

$$N_1 \sum_{i=1}^{k/2} \prod_{j=1}^{i-1} [(t_{2j} + 1)/(t_{2j+1} + 1)]。定理 4 证毕。$$

**注 1** 由定理 3 和定理 4, 取  $k = 1, 2$  就得到推论 3 和推论 4 关于星和双星的结果。下面进一步给出  $k = 3$  的毛毛虫树线图最大匹配数的具体结果。

**推论 5** 设  $T = T(t_1, t_2, t_3)$  是偶数个顶点的毛毛虫树。1) 若  $t_1, t_2, t_3$  都是奇数, 则  $\text{Max}(L(T(t_1, t_2, t_3))) = 3t_1!!t_2!!t_3!!$ ; 2) 若  $t_1, t_3$  是偶数,  $t_2$  是奇数, 则  $\text{Max}(L(T(t_1, t_2, t_3))) = (t_1 + t_2 + t_3 + 2)t_1!!t_2!!t_3!!$ ; 3) 若  $t_1$  是奇数,  $t_2, t_3$  是偶数, 则  $\text{Max}(L(T(t_1, t_2, t_3))) = (t_3 + 2t_2 + 2)t_1!!t_2!!t_3!!$ ; 4) 若  $t_3$  是奇数,  $t_1, t_2$  是偶数, 则  $\text{Max}(L(T(t_1, t_2, t_3))) = (t_1 + 2t_2 + 2)t_1!!t_2!!t_3!!$ 。

**证明** 1) 由定理 3 直接可得。

2) 若  $t_1, t_3$  是偶数,  $t_2$  是奇数, 此时  $\mathcal{E} = \cup_{i=1}^3 L_i \cup \{e_1, e_2\}$ , 对任意的  $e \in \cup_{i=1}^3 L_i$ ,  $T_e^1 = T(t_1 - 1, t_2, t_3)$  或  $T(t_1, t_2 - 1, t_3)$  或  $T(t_1, t_2, t_3 - 1)$ 。不管哪种情况, 由引理 4, 都有  $M(L(T_e^1)) = t_1!!t_2!!t_3!!$ 。所以  $\sum_{e \in \cup_{i=1}^3 L_i} [M(L(T_e^1))M(L(T_e^2))] = (t_1 + t_2 + t_3)t_1!!t_2!!t_3!!$ 。又  $M(L(T_{e_1}^1))M(L(T_{e_2}^2)) = M(L(T_{e_1}^1))M(L(T_{e_2}^2)) = t_1!!t_2!!t_3!!$ , 所以 2) 得证。

由对称性, 3) 和 4) 只需证明一个就足够了。现证明 3)。若  $t_1$  是奇数,  $t_2, t_3$  是偶数, 此时  $\mathcal{E} = \cup_{i=1}^3 L_i \cup \{e_2\}$ , 同样计算可得,  $\sum_{e \in L_1} [M(L(T_e^1))M(L(T_e^2))] = t_1(t_1 - 1)!!(t_2 + 2)!!t_3!! = (t_2 + 1)t_1!!t_2!!t_3!!$ ,  $\sum_{e \in L_2 \cup L_3} [M(L(T_e^1))M(L(T_e^2))] = (t_2 + t_3)t_1!!t_2!!t_3!!$ ,  $M(L(T_{e_2}^1))M(L(T_{e_2}^2)) = t_1!!t_2!!t_3!!$ , 所以  $\text{Max}(L(T)) = (t_3 + 2t_2 + 2)t_1!!t_2!!t_3!!$ 。结论证毕。

下面考虑另一类树线图的最大匹配数, 即所有顶点的度都为奇数的树, 这类树的顶点数显然为偶数, 则有下面的结论。

**定理 5** 设  $T$  是  $n$  个顶点的一棵树, 且所有顶点的度都为奇数, 则  $\text{Max}(L(T)) = \sum_{e \in E(T)} [M(L(T_e^1))M(L(T_e^2))]$ 。

**证明** 对任意  $e = uv \in E(T)$ ,  $T - e$  的 2 个分支  $T_e^1, T_e^2$  都分别只含有一个偶度顶点  $u$  和  $v$ , 所以  $T_e^1, T_e^2$  的顶点数都为奇数, 即边数都为偶数, 由此得  $\mathcal{E} = E(T)$ , 再由定理 2, 结论得证。

最后给出三元树 (即顶点度为 1 或 3 的树) 线图最大匹配数的结果。

**推论 6** 设  $T$  是一棵顶点数为  $n$  的三元树, 则  $\text{Max}(L(T)) = n - 1$ 。

**证明** 由定理 5,  $\text{Max}(L(T)) = \sum_{e \in E(T)} [M(L(T_e^1))M(L(T_e^2))]$ 。又  $\Delta(T) \leq 3$ , 由引理 3, 对任意的  $e \in E(T)$ ,  $M(L(T_e^1)) = M(L(T_e^2)) = 1$ , 所以结论得证。

[ 参 考 文 献 ]

[1] LOVÁSZ L, PLUMMER M. Matching theory[M]. New York: North-Holland, 1986.  
[2] PROPP J. Enumerations of matchings: problems and progress[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999: 255-291.  
[3] HALL G G. A graphic model of a class of molecules[J]. Int Math Educ Sci Technol, 1973(4): 233-240.  
[4] PAULING L. The nature of chemical bond[M]. New York: Cornell University Press, 1939.  
[5] SWINBORNE-SHELDRAKE R, HERNDON W C, GUTMAN I. Kekulé structures and resonance energies of benzenoid hydrocarbons[J]. Tetrahedron Letters, 1975, 16(10): 755-758.  
[6] JERRUM M. Two-dimensional monomer-dimer systems are computationally intractable[J]. Stat Phys, 1987, 48: 121-134.  
[7] VALIANT L G. The complexity of computing the permanent[J]. Theoret Comput Sci, 1979, 8: 410-421.  
[8] SUMNER M L. Graphs with 1-factors[J]. Proc Amer Math Soc, 1974, 42: 8-12.  
[9] VERGNAS M L. A note on matchings in graphs[J]. Cah Cent Etud Rech Oper, 1975, 17: 257-260.  
[10] DONG F M, YAN W G, ZHANG F J. On the number of perfect matchings of line graphs[J]. Discrete Appl Math, 2013, 161: 794-801.  
[11] ZHOU X. A new lower bound for the number of perfect matchings of line graph[J]. Information Processing Letters, 2015, 115: 269-274.  
[12] 周雪. 线图的完美匹配数最小和次小的图[D]. 广州: 华南师范大学, 2013.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)