

恒加速寿命试验广义半正态分布的统计推断

韩秀蓉¹, 陈建伟², 蔡南莲¹

(1. 集美大学理学院, 福建 厦门 361021; 2. 圣地亚哥州立大学数学与统计系, 圣地亚哥 92182)

[摘要] 在恒加速寿命试验下, 研究具有广义半正态分布寿命的参数估计问题。证明当恒加速寿命试验的应力和广义半正态分布参数满足一定条件时, 寿命形成了一个几何过程; 探讨模型参数的最大似然估计、渐近置信区间和 bootstrap 置信区间的求法。对得到的估计结果进行数值模拟, 模拟结果表明, 模型参数估计值及置信区间是有效的。

[关键词] 加速寿命试验; 几何过程; 最大似然估计; bootstrap 置信区间; 渐近分布

[中图分类号] O 213.2; O 212.1

Statistical Inference of Generalized Half-Normal Distribution for Constant Accelerated Life Tests

HAN Xiurong¹, CHEN Jianwei², CAI Nanlian¹

(1. School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China;

2. Department of Mathematics and Statistics, San Diego State University, San Diego 92182, USA)

Abstract: In this paper, under constant-stress accelerated life test, the parameter estimations on a population with generalized half-normal distribution were considered. Firstly, it was proved that the product life forms a geometric process when certain conditions of the stress and parameters of generalized half-normal distribution are satisfied. Secondly, the maximum likelihood estimations, asymptotic confidence interval and bootstrap confidence interval estimations of the parameters were proposed. Finally, the obtained estimation results were numerically simulated, which showed that the model parameter estimations and confidence interval estimations were valid.

Keywords: accelerated life test; geometric process; maximum likelihood estimation; bootstrap confidence; asymptotic distribution

0 引言

随着科学技术的快速发展, 人们对高可靠性、长寿命产品的需求越来越强烈, 为此使用加速寿命试验 (accelerated life test, ALT) 是一种有效的途径。ALT 是通过加大试验应力来缩短试验周期的一种寿命试验方法, 它减少了试验时间和试验成本。ALT 进入我国后, 立即引起了很多行业学者的研究和应用, 如机械工程、电子、航空、环境工程等行业^[1-3]。ALT 按照应力施加的方式不同分为 3 种类

[收稿日期] 2022-06-21

[基金项目] 国家社会科学基金项目“半参数动态空间的 PROBIT 模型的统计推断与贝叶斯算法及应用”(18BTJ031)

[作者简介] 通信作者: 蔡南莲 (1965—), 教授, 硕导, 从事概率论与数理统计方向研究。E-mail: cainl@jmu.edu.cn

<http://xuebaobangong.jmu.edu.cn/zkb>

型, 即恒定应力 ALT、步进应力 ALT 和序进应力 ALT。其中: 恒定应力 ALT 的操作比较简单, 经常被实际采用, 如文献 [4] 考虑了基于威布尔分布的逐步 I 型混合删失数据的恒应力寿命试验, 用最大似然估计、百分位 bootstrap 和马尔可夫链蒙特卡罗构建模型参数的统计推断; 另外 2 种 ALT 也被广泛应用, 如文献 [5-6]。

Lam^[7]第一次提出了几何过程的概念, 并将其引入修复和更换问题中。因为随机递减的几何过程可以用来描述退化的产品, 随机递增的几何过程可以用来描述进化的产品, 所以几何过程模型适用于研究 ALT, 产品的寿命也会随着应力水平的增加而随机降低。很多学者对此进行了研究, 如 Mustafa^[8]基于 II 型截尾样本数据, 假设 ALT 中增加应力水平下的寿命形成一个几何过程, 对参数进行统计推断并进行仿真模拟。Zhou 等^[9]考虑了基于逐步 I 型混合截尾数据的恒定应力 ALT 模型的几何过程实现, 并进行了蒙特卡罗模拟研究。

Cooray 等^[10]通过静态疲劳模型推导出广义半正态分布, 它是广义伽马分布的一种特殊情况。该分布故障率函数具有单调减小、单调增大和浴缸形状等多种形式, 便于在 ALT 和可靠性理论中加以研究。Olmos 等^[11]对广义半正态分布的性质展开研究, 并得到比广义半正态分布具有更大峰度的减半正态分布。目前, 学者们也开始对广义半正态分布 ALT 进行研究, 在 ALT 下, Wang 等^[12]讨论了基于完全样本情况下广义半正态分布的参数估计。Ahmadi 等^[13]基于逐步 II 型区间截尾样本, 研究广义半正态分布的未知参数和可靠性函数的估计问题。但目前基于几何过程情况下对广义半正态分布 ALT 的结果较为少见。

本文主要探讨恒应力 ALT 下具有广义半正态分布寿命参数的统计推断问题, 研究广义半正态分布的尺度参数、形状参数和几何过程的比率 3 个参数的最大似然估计问题; 利用最大似然估计量的渐近正态性, 求出参数的渐近置信区间和 bootstrap 置信区间; 最后利用 R 软件编程, 对得到的 3 个参数的最大似然估计、渐近置信区间、bootstrap 置信区间进行数值模拟。

1 模型与假设

1.1 几何过程及广义半正态分布

定义 1^[6] 设 $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ 是非负的相互独立的随机变量序列, 如果 X_1 的分布函数为 $F(x)$, X_n 的分布函数为 $F(a^{n-1}x)$ ($n = 1, 2, \dots$), 称 $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ 为几何过程, 实数 $a > 0$ 称为几何过程的比率。

当 $a = 1$ 时, 几何过程为更新过程; 当 $0 < a < 1$ 时, 几何过程是随机增加; 当 $a > 1$ 时, 几何过程是随机减少。

若 $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ 是一个几何过程, 设 X_1 的概率密度函数为 $f(x)$, $E(X_1) = \lambda$, $D(X_1) = \tau^2$, 那么容易求得 X_n 的概率密度函数为

$$f_{X_n}(x) = a^{n-1}f(a^{n-1}x), \quad (1)$$

且 $E(X_n) = \lambda/a^{n-1}$, $D(X_n) = \tau^2/a^{2(n-1)}$ 。于是 a 、 λ 和 τ 为几何过程的 3 个重要参数。

定义 2^[7] 若非负随机变量 X 的密度函数为

$$f(x; \theta, \sigma) = \sqrt{2/\pi}(\theta/x)(x/\sigma)^\theta e^{(-1/2)(x/\sigma)^{2\theta}}, x > 0. \quad (2)$$

称随机变量 X 服从广义半正态分布, 记为 $X \sim \text{GHN}(x; \theta, \sigma)$, 其中 $\theta > 0$ 为广义半正态分布的形状参数, $\sigma > 0$ 为尺度参数。

广义半正态分布的累积分布函数为

$$F(x; \theta, \sigma) = 1 - 2\Phi(-(x/\sigma)^\theta), x > 0. \quad (3)$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布的累积分布函数。

容易求得广义半正态分布的均值 $\lambda = E(X) = \sqrt{2^{1/\theta}/\pi} \Gamma[(1+\theta)/(2\theta)]\sigma$, 方差 $\tau^2 = \text{Var}(X) =$

$(2^{1/\theta}/\pi)[\sqrt{\pi}\Gamma((2+\theta)/\theta) - \Gamma^2((1+\theta)/\theta)]\sigma^2$, 其中 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ 。

1.2 ALT 和模型假设

设在 s 个应力水平 S_1, S_2, \dots, S_s 下, 分别对 n 个产品进行恒加速寿命试验, 记录产品的失效时间, 直到所有的产品都失效, 则停止试验。

假设 1 在应力水平 $S_k (k = 1, 2, \dots, s)$ 下, 产品寿命 X_k 服从广义半正态分布, 其概率密度为

$$f_{X_k}(x) = \sqrt{2/\pi}(\theta/x)(x/\sigma_k)^{\theta_k} \exp[-(1/2)(x/\sigma_k)^{2\theta_k}], k = 1, 2, \dots, s. \quad (4)$$

其中: 参数 θ_k 和 σ_k 分别是形状参数和尺度参数。

假设 2 设在每个应力 $S_k (k = 1, 2, \dots, s)$ 下, 形状参数保持不变, 即 $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_s = \theta$ 。

假设 3 设尺度参数 σ_k 和应力 S_k 具有对数线性关系, 即 $\ln \sigma_k = c + bS_k, k = 1, 2, \dots, s$, 其中: c 和 b 为系数参数。

假设 4 设各个应力水平 S_1, S_2, \dots, S_s 满足 $S_{k+1} - S_k = \Delta S, k = 1, 2, \dots, s-1$, ΔS 为常数。

在上述假设条件下, 有如下命题。

命题 1 在假设 1 ~ 假设 4 条件下, $\{X_k, k = 1, 2, \dots, s\}$ 形成一个几何过程。

证明 由假设 3 可以得到, $\ln(\sigma_{k+1}/\sigma_k) = b(S_{k+1} - S_k) = b\Delta S$ 。令 $e^{b\Delta S} = 1/a$, 得 $\sigma_k = \sigma_1/a^{k-1}$ 。

由假设 1, 在第 k 个应力水平 S_k 下, 产品寿命的概率密度函数为: $f_{X_k}(x) = \sqrt{2/\pi}(\theta/x)(x/\sigma_k)^{\theta} \exp[-(1/2)(x/\sigma_k)^{2\theta}] = \sqrt{2/\pi}(\theta/x)(x/(\sigma_1/a^{k-1}))^{\theta} \exp[-(1/2)(x/(\sigma_1/a^{k-1}))^{2\theta}] = a^{k-1}\sqrt{2/\pi}(\theta/(a^{k-1}x))((a^{k-1}x)/\sigma_1)^{\theta} \exp[-(1/2)((a^{k-1}x)/\sigma_1)^{2\theta}]$ 。因此, 得到

$$f_{X_k}(x) = a^{k-1}f_{X_1}(a^{k-1}x), k = 1, 2, \dots, s. \quad (5)$$

其中: f_{X_1} 为 X_1 的概率密度函数。比较式 (1) 和式 (5) 得, $\{X_k, k = 1, 2, \dots, s\}$ 形成一个几何过程。

2 最大似然估计

本节探讨模型参数 a, θ, σ 的最大似然估计量的求法。在实际应用中, 似然方程组的解就是参数的最大似然估计值。由于该模型参数的似然方程组的精确解比较复杂, 难以求出, 因此利用牛顿迭代法求似然方程组的近似解。

在第 k 个应力水平 S_k 下进行 ALT, 记录 n 个产品的失效时间。设失效时间为 $x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}$, $k = 1, 2, \dots, s$ 。令 $\sigma_1 = \sigma$, 由式 (5) 可以得到, X_k 的概率密度函数为: $f_{X_k}(x; a, \theta, \sigma) = \sqrt{2/\pi}(\theta/x)((a^{k-1}x)/\sigma)^{\theta} \exp[-(1/2)((a^{k-1}x)/\sigma)^{2\theta}], x > 0$ 。

本试验共有 s 个应力水平, 加速试验模型的似然函数为

$$L(x; a, \theta, \sigma) = \prod_{k=1}^s L_k = \prod_{k=1}^s \left\{ (\sqrt{2/\pi})^n \theta^n (a^{k-1}/\sigma)^{n\theta} \prod_{i=1}^n x_{ki}^{\theta-1} \exp[-(1/2) \sum_{i=1}^n ((a^{k-1}x_{ki})/\sigma)^{2\theta}] \right\}. \quad (6)$$

进而得到加速试验模型的对数似然函数为

$$l(x; a, \theta, \sigma) = \sum_{k=1}^s [n \ln \sqrt{2/\pi} + n \ln \theta + n \theta \ln a^{k-1} - n \theta \ln \sigma + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_{ki} - (1/2) \sum_{i=1}^n ((a^{k-1}x_{ki})/\sigma)^{2\theta}]. \quad (7)$$

通过计算, 得出 $l(x; a, \theta, \sigma)$ 一阶偏导数为

$$\begin{cases} \partial l(x; a, \theta, \sigma) / \partial a = \sum_{k=1}^s [(k-1)n\theta/a - ((k-1)\theta/a) \sum_{i=1}^n ((a^{k-1}x_{ki})/\sigma)^{2\theta}], \\ \partial l(x; a, \theta, \sigma) / \partial \theta = \sum_{k=1}^s [n/\theta + n \ln a^{k-1} - n \ln \sigma + \sum_{i=1}^n \ln x_{ki} - \sum_{i=1}^n ((a^{k-1}x_{ki})/\sigma)^{2\theta} \ln ((a^{k-1}x_{ki})/\sigma)], \\ \partial l(x; a, \theta, \sigma) / \partial \sigma = \sum_{k=1}^s [-n\theta/\sigma + (\theta/\sigma) \sum_{i=1}^n ((a^{k-1}x_{ki})/\sigma)^{2\theta}]. \end{cases} \quad (8)$$

利用式 (8), 求出 $l(x; a, \theta, \sigma)$ 二阶偏导数和二阶混合偏导数为

$$\left\{ \begin{aligned} \partial^2 l(x; a, \theta, \sigma) / \partial a^2 &= \sum_{k=1}^s \{ -(k-1)n\theta/a^2 - [(2(k-1)^2\theta^2 - (k-1)\theta)/a^2] \sum_{i=1}^n ((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)^{2\theta} \}, \\ \partial^2 l(x; a, \theta, \sigma) / \partial \theta^2 &= \sum_{k=1}^s [-n/\theta^2 - 2 \sum_{i=1}^n ((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)^{2\theta} (\ln((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma))^2], \\ \partial^2 l(x; a, \theta, \sigma) / \partial \sigma^2 &= \sum_{k=1}^s [n\theta/\sigma^2 - ((\theta + 2\theta^2)/\sigma^2) \sum_{i=1}^n ((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)^{2\theta}], \\ \partial^2 l(x; a, \theta, \sigma) / \partial a \partial \theta &= \sum_{k=1}^s [(k-1)n/a - ((k-1)/a) \sum_{i=1}^n ((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)^{2\theta} - \\ &\quad (2(k-1)\theta/a) \sum_{i=1}^n ((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)^{2\theta} \ln((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)], \\ \partial^2 l(x; a, \theta, \sigma) / \partial a \partial \sigma &= \sum_{k=1}^s [2(k-1)\theta^2/(a\sigma) \sum_{i=1}^n ((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)^{2\theta}], \\ \partial^2 l(x; a, \theta, \sigma) / \partial \theta \partial \sigma &= \sum_{k=1}^s [-n/\sigma + (1/\sigma) \sum_{i=1}^n ((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)^{2\theta} + \\ &\quad (2\theta/\sigma) \sum_{i=1}^n ((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)^{2\theta} \ln((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)]. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

由式 (8) 得到似然方程组为

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{k=1}^s [(k-1)n\theta/a - ((k-1)\theta/a) \sum_{i=1}^n ((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)^{2\theta}] &= 0, \\ \sum_{k=1}^s [n/\theta + n \ln((a^{k-1})/\sigma) + \sum_{i=1}^n \ln x_{k_i} - \sum_{i=1}^n ((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)^{2\theta} \ln((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)] &= 0, \\ \sum_{k=1}^s [-n\theta/\sigma + (\theta/\sigma) \sum_{i=1}^n ((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)^{2\theta}] &= 0. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

下面采用牛顿迭代法求近似解, 详见文献[14]。牛顿迭代法的步骤如下。

1) 给定初始值 $\begin{pmatrix} a \\ \theta \\ \sigma \end{pmatrix}^{(0)}$ 。

2) 进行迭代。令 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \partial^2 l(x; a, \theta, \sigma) / \partial a^2 & \partial^2 l(x; a, \theta, \sigma) / \partial \theta \partial a & \partial^2 l(x; a, \theta, \sigma) / \partial \sigma \partial a \\ \partial^2 l(x; a, \theta, \sigma) / \partial a \partial \theta & \partial^2 l(x; a, \theta, \sigma) / \partial \theta^2 & \partial^2 l(x; a, \theta, \sigma) / \partial \sigma \partial \theta \\ \partial^2 l(x; a, \theta, \sigma) / \partial a \partial \sigma & \partial^2 l(x; a, \theta, \sigma) / \partial \theta \partial \sigma & \partial^2 l(x; a, \theta, \sigma) / \partial \sigma^2 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} a \\ \theta \\ \sigma \end{pmatrix}^{t+1} = \begin{pmatrix} a \\ \theta \\ \sigma \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} \partial l(x; a, \theta, \sigma) / \partial a \\ \partial l(x; a, \theta, \sigma) / \partial \theta \\ \partial l(x; a, \theta, \sigma) / \partial \sigma \end{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} \bigg|_{(a, \theta, \sigma)^{(t)}}, \quad t = 1, 2, \dots, \text{ 其中 } \mathbf{A}^{-1} \text{ 表示 } \mathbf{A} \text{ 的逆矩阵。}$$

3) 重复步骤 2, 直至收敛。

3 置信区间估计

3.1 渐近置信区间估计

由于最大似然估计量具有渐近正态性, 本节由节 2 求出的最大似然估计量来求出参数 a 、 θ 、 σ 的渐近置信区间。

令 $\eta = (a, \theta, \sigma)$, 其中 $\eta_1 = a$, $\eta_2 = \theta$, $\eta_3 = \sigma$ 。设 $\mathbf{I}(\eta)$ 为 η 的 Fisher 信息矩阵, 即 $\mathbf{I}(\eta) = (\mathbf{I}_{ij})_{3 \times 3} = (E(-\partial^2 l(\eta) / \partial \eta_i \partial \eta_j))_{3 \times 3}$, 且 $\mathbf{I}_{11} = E(-\partial^2 l(x; a, \theta, \sigma) / \partial a^2) = -E\{\sum_{k=1}^s [(k-1)n\theta/a -$

$$\begin{aligned}
& ((k-1)\theta/a) \sum_{i=1}^n ((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)^{2\theta} \} ; I_{22} = E(-\partial^2 l(x;a,\theta,\sigma)/\partial\theta^2) = -E\{ \sum_{k=1}^s [n/\theta + n\ln a^{k-1} - n\ln \sigma + \\
& \sum_{i=1}^n \ln x_{k_i} - \sum_{i=1}^n ((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)^{2\theta} \ln ((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)] \} ; I_{33} = E(-\partial^2 l(x;a,\theta,\sigma)/\partial\sigma^2) = -E\{ \sum_{k=1}^s [n\theta/\sigma^2 - \\
& ((\theta + 2\theta^2)/\sigma^2) \sum_{i=1}^n ((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)^{2\theta} \} ; I_{12} = I_{21} = E(-\partial^2 l(x;a,\theta,\sigma)/\partial a \partial \theta) = -E\{ \sum_{k=1}^s [(k-1)n/a - \\
& ((k-1)/a) \sum_{i=1}^n ((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)^{2\theta} - (2(k-1)\theta/a) \sum_{i=1}^n ((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)^{2\theta} \ln ((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)] \} ; I_{13} = I_{31} = \\
& E(-\partial^2 l(x;a,\theta,\sigma)/\partial a \partial \sigma) = -E\{ \sum_{k=1}^s [2(k-1)\theta^2/(a\sigma)] \sum_{i=1}^n [(a^{k-1}x_{k_i})/\sigma]^{2\theta} \} ; I_{23} = I_{32} = E(-\partial^2 l(x;a,\theta,\sigma)/ \\
& \partial\theta \partial \sigma) = -E\{ \sum_{k=1}^s [-n/\sigma + (1/\sigma) \sum_{i=1}^n (a^{k-1}x_{k_i}/\sigma)^{2\theta} + (2\theta/\sigma) \sum_{i=1}^n ((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)^{2\theta} \ln ((a^{k-1}x_{k_i})/\sigma)] \} 。
\end{aligned}$$

设 $\hat{\eta} = (\hat{a}, \hat{\theta}, \hat{\sigma})$ 为 $\eta = (a, \theta, \sigma)$ 的最大似然估计, 则 $\hat{\eta} - \eta \rightarrow N(0, I^{-1}(\eta))$, 其中 $I^{-1}(\eta)$ 为 $I(\eta)$ 的逆矩阵。且

$$\sum = I^{-1}(\eta) = \begin{bmatrix} \text{Var}(\hat{a}) & \text{Cov}(\hat{a}, \hat{\theta}) & \text{Cov}(\hat{a}, \hat{\sigma}) \\ \text{Cov}(\hat{\theta}, \hat{a}) & \text{Var}(\hat{\theta}) & \text{Cov}(\hat{\theta}, \hat{\sigma}) \\ \text{Cov}(\hat{\sigma}, \hat{a}) & \text{Cov}(\hat{\sigma}, \hat{\theta}) & \text{Var}(\hat{\sigma}) \end{bmatrix} 。 \quad (11)$$

给定显著性水平为 α , 得到 a 、 θ 、 σ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 渐近置信区间分别为 $(\hat{a} - Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{a})}, \hat{a} + Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{a})})$ 、 $(\hat{\theta} - Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})}, \hat{\theta} + Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})})$ 、 $(\hat{\sigma} - Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{\sigma})}, \hat{\sigma} + Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{\sigma})})$, 其中 $Z_{1-\alpha/2}$ 为标准正态分布的 $1 - \alpha/2$ 分位数。

3.2 bootstrap 置信区间估计

本节求出了模型参数 a 、 θ 、 σ 的 bootstrap 置信区间。bootstrap 置信区间的求法可参考文献[15]。获得 bootstrap 置信区间的步骤如下。

1) 基于原始样本 x_{k_i} , 由上面的牛顿迭代法, 得到 a 、 θ 、 σ 的最大似然估计分别为 \hat{a} 、 $\hat{\theta}$ 、 $\hat{\sigma}$ 。

2) 设 $b = 1, 2, \dots, B$, 基于 \hat{a} 、 $\hat{\theta}$ 、 $\hat{\sigma}$, 令 $x_{k_i}^* = (\hat{\sigma}/\hat{a}^{k-1})[-\Phi^{-1}((1-u_{k_i})/2)]^{1/\hat{\theta}}$, 其中 u_{k_i} 为 $(0, 1)$ 的均匀分布的随机数, $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, s$; Φ^{-1} 为标准正态分布函数的反函数。得到的 $x_{k_i}^*$ 为 $\text{GHN}(x; \hat{a}, \hat{\theta}, \hat{\sigma})$ 分布的样本。

3) 由样本 $x_{k_i}^*$, $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, s$, 计算 a 、 θ 、 σ 的最大似然估计 $\hat{a}^{(b)}$ 、 $\hat{\theta}^{(b)}$ 、 $\hat{\sigma}^{(b)}$ 。利用式 (11) 计算 $\text{Var}(\hat{a}^{(b)})$ 、 $\text{Var}(\hat{\theta}^{(b)})$ 、 $\text{Var}(\hat{\sigma}^{(b)})$ 。

4) 计算 $Ta^{(b)} = (\hat{a}^{(b)} - \hat{a})/\sqrt{\text{Var}(\hat{a}^{(b)})}$, $T\theta^{(b)} = (\hat{\theta}^{(b)} - \hat{\theta})/\sqrt{\text{Var}(\hat{\theta}^{(b)})}$, $T\sigma^{(b)} = (\hat{\sigma}^{(b)} - \hat{\sigma})/\sqrt{\text{Var}(\hat{\sigma}^{(b)})}$ 。

5) 重复 2~4 步骤 B 次, 得到 $T\hat{a}^{(1)}, T\hat{\theta}^{(1)}, T\hat{\sigma}^{(1)}, T\hat{a}^{(2)}, T\hat{\theta}^{(2)}, T\hat{\sigma}^{(2)}, \dots, T\hat{a}^{(B)}, T\hat{\theta}^{(B)}, T\hat{\sigma}^{(B)}$ 。

当显著性水平为 α 时, 第 $\alpha/2$ 分位点和第 $1 - \alpha/2$ 分位点分别为 $T_{B(\alpha/2)}$ 、 $T_{B(1-\alpha/2)}$ 。因此, a 、 θ 、 σ 的 $100(1 - \alpha)\%$ bootstrap 置信区间为 $(\hat{a}^{(b)} + T_{B(\alpha/2)} \sqrt{\text{Var}(\hat{a}^{(b)})}, \hat{a}^{(b)} + T_{B(1-\alpha/2)} \sqrt{\text{Var}(\hat{a}^{(b)})})$ 、 $(\hat{\theta}^{(b)} + T_{B(\alpha/2)} \sqrt{\text{Var}(\hat{\theta}^{(b)})}, \hat{\theta}^{(b)} + T_{B(1-\alpha/2)} \sqrt{\text{Var}(\hat{\theta}^{(b)})})$ 、 $(\hat{\sigma}^{(b)} + T_{B(\alpha/2)} \sqrt{\text{Var}(\hat{\sigma}^{(b)})}, \hat{\sigma}^{(b)} + T_{B(1-\alpha/2)} \sqrt{\text{Var}(\hat{\sigma}^{(b)})})$ 。

4 数值模拟结果

取参数真值 $a = 1.03, 1.05$, $\theta = 1.1, 1.2$, $\sigma = 1$, 应力水平的个数 $s = 3, 4$, 每个应力水平试验

的样本数 $n = 60, 80$ 。利用 R 软件, 基于 500 次模拟, 得到 3 个参数 a 、 θ 、 σ 的最大似然估计的平均值 (Mean)、样本标准差 (SE)、渐近标准误差 (\hat{SE})、均方误差的平方根 (\sqrt{MSE})、置信水平为 0.95 的渐近置信区间覆盖率和 bootstrap 置信区间覆盖率等。模拟结果如表 1 ~ 表 4 所示。

由表 1 ~ 表 4 可以看出, 比较 $n = 60$ 与 $n = 80$ 两种情形, 随着样本容量的增加, 参数 a 、 θ 、 σ 的最大似然估计的 SE、 \hat{SE} 、 \sqrt{MSE} 都变小, 其中 a 、 θ 的误差较小, σ 的误差相对较大。以 SE 为例, a 的 SE 最小值为 0.030 83, 最大值为 0.061 6; θ 的 SE 最小值为 0.054 68, 最大值为 0.076 50; σ 的 SE 最小值为 0.090 20, 最大值为 0.131 30。

由表 1 ~ 表 4 还可以看出, 对于不同的取值, 从覆盖率来看, 2 种置信区间的覆盖率均较高, 渐近置信区间的覆盖率在 0.914 以上, bootstrap 置信区间的覆盖率在 0.922 以上。对于参数的不同取值, 模拟结果得到各个参数的渐近置信区间的覆盖率, a 在 0.934 ~ 0.952, θ 在 0.928 ~ 0.948, σ 在 0.914 ~ 0.936。而 bootstrap 置信区间的覆盖率, a 在 0.922 ~ 0.950, θ 在 0.952 ~ 0.962, σ 在 0.940 ~ 0.962。

表 1 $s = 3$ 、 $\theta = 1.2$ 、 $\sigma = 1$ 的模拟结果Tab. 1 Simulation results with $s = 3, \theta = 1.2, \sigma = 1$

n	a	估计值	Mean	SE	\sqrt{MSE}	\hat{SE}	置信区间覆盖率	
							渐近	Bootstrap
60	1.03	\hat{a}	1.028 71	0.056 50	0.056 51	0.055 22	0.952	0.922
		$\hat{\theta}$	1.219 33	0.076 50	0.078 91	0.075 48	0.948	0.960
		$\hat{\sigma}$	1.028 86	0.128 80	0.131 99	0.121 12	0.936	0.940
	1.05	\hat{a}	1.048 69	0.057 59	0.057 61	0.056 29	0.952	0.922
		$\hat{\theta}$	1.219 33	0.076 50	0.078 91	0.075 48	0.948	0.960
		$\hat{\sigma}$	1.048 84	0.131 30	0.140 11	0.123 47	0.936	0.954
80	1.03	\hat{a}	1.030 50	0.049 75	0.049 75	0.047 88	0.936	0.940
		$\hat{\theta}$	1.214 88	0.069 28	0.070 87	0.065 03	0.928	0.960
		$\hat{\sigma}$	1.031 62	0.111 13	0.115 55	0.105 07	0.932	0.950
	1.05	\hat{a}	1.050 51	0.050 71	0.050 71	0.048 81	0.936	0.940
		$\hat{\theta}$	1.214 88	0.069 28	0.070 87	0.065 03	0.928	0.960
		$\hat{\sigma}$	1.051 65	0.113 29	0.124 53	0.107 11	0.924	0.958

表 2 $s = 3$ 、 $\theta = 1.1$ 、 $\sigma = 1$ 的模拟结果Tab. 2 Simulation results with $s = 3, \theta = 1.1, \sigma = 1$

n	a	估计值	Mean	SE	\sqrt{MSE}	\hat{SE}	置信区间覆盖率	
							渐近	Bootstrap
60	1.03	\hat{a}	1.028 75	0.061 60	0.061 62	0.060 26	0.948	0.922
		$\hat{\theta}$	1.117 72	0.070 13	0.072 33	0.069 19	0.948	0.960
		$\hat{\sigma}$	1.029 56	0.140 53	0.143 61	0.132 37	0.932	0.940
	1.05	\hat{a}	1.048 72	0.06 280	0.062 81	0.061 43	0.948	0.922
		$\hat{\theta}$	1.117 72	0.070 13	0.072 33	0.069 19	0.948	0.960
		$\hat{\sigma}$	1.049 54	0.143 26	0.151 60	0.134 94	0.942	0.950
80	1.03	\hat{a}	1.030 66	0.054 27	0.054 28	0.052 25	0.934	0.936
		$\hat{\theta}$	1.113 64	0.063 51	0.064 96	0.059 61	0.928	0.960
		$\hat{\sigma}$	1.032 36	0.121 32	0.125 57	0.114 81	0.930	0.952
	1.05	\hat{a}	1.050 67	0.055 33	0.055 33	0.053 27	0.934	0.936
		$\hat{\theta}$	1.113 64	0.063 51	0.064 96	0.059 61	0.928	0.960
		$\hat{\sigma}$	1.052 41	0.123 68	0.134 34	0.117 03	0.926	0.952

表3 $s=4$ 、 $\theta=1.2$ 、 $\sigma=1$ 的模拟结果
Tab.3 Simulation results with $s=4$, $\theta=1.2$, $\sigma=1$

n	a	估计值	Mean	SE	$\sqrt{\text{MSE}}$	$\hat{\text{SE}}$	置信区间覆盖率	
							渐近	Bootstrap
60	1.03	\hat{a}	1.029 43	0.037 10	0.037 10	0.034 50	0.936	0.934
		$\hat{\theta}$	1.215 01	0.069 11	0.070 73	0.065 03	0.928	0.962
		$\hat{\sigma}$	1.029 38	0.105 94	0.109 94	0.097 35	0.920	0.950
	1.05	\hat{a}	1.049 42	0.037 82	0.037 83	0.035 67	0.936	0.934
		$\hat{\theta}$	1.215 01	0.069 11	0.070 73	0.065 03	0.928	0.962
		$\hat{\sigma}$	1.049 37	0.107 99	0.118 77	0.099 24	0.910	0.962
80	1.03	\hat{a}	1.029 06	0.030 83	0.030 84	0.030 19	0.948	0.950
		$\hat{\theta}$	1.213 44	0.059 65	0.061 15	0.056 21	0.942	0.952
		$\hat{\sigma}$	1.029 25	0.088 49	0.093 20	0.084 03	0.926	0.962
	1.05	\hat{a}	1.049 04	0.031 43	0.031 44	0.030 78	0.948	0.950
		$\hat{\theta}$	1.213 44	0.059 65	0.061 15	0.056 21	0.942	0.952
		$\hat{\sigma}$	1.049 23	0.090 20	0.102 79	0.085 66	0.914	0.948

表4 $s=4$ 、 $\theta=1.1$ 、 $\sigma=1$ 的模拟结果
Tab.4 Simulation results with $s=4$, $\theta=1.1$, $\sigma=1$

n	a	估计值	Mean	SE	$\sqrt{\text{MSE}}$	$\hat{\text{SE}}$	置信区间覆盖率	
							渐近	Bootstrap
60	1.03	\hat{a}	1.029 44	0.040 47	0.040 47	0.038 18	0.934	0.934
		$\hat{\theta}$	1.113 75	0.063 35	0.064 83	0.059 61	0.928	0.962
		$\hat{\sigma}$	1.029 87	0.115 59	0.119 39	0.106 33	0.916	0.950
	1.05	\hat{a}	1.049 43	0.041 25	0.041 26	0.038 92	0.934	0.934
		$\hat{\theta}$	1.113 75	0.063 35	0.064 83	0.059 61	0.928	0.962
		$\hat{\sigma}$	1.049 87	0.117 83	0.127 97	0.108 40	0.912	0.962
80	1.03	\hat{a}	1.029 02	0.033 63	0.033 64	0.032 94	0.948	0.950
		$\hat{\theta}$	1.112 32	0.054 68	0.056 05	0.051 53	0.942	0.952
		$\hat{\sigma}$	1.029 56	0.096 59	0.101 02	0.091 74	0.926	0.962
	1.05	\hat{a}	1.049 00	0.034 28	0.034 30	0.033 58	0.948	0.950
		$\hat{\theta}$	1.112 32	0.054 68	0.056 05	0.051 53	0.942	0.952
		$\hat{\sigma}$	1.049 55	0.098 47	0.110 25	0.093 52	0.918	0.958

5 结论

本文基于广义半正态分布的形状参数不变,尺度参数与应力增量满足对数线性关系,得到了广义半正态分布在恒加速寿命试验中寿命形成一个几何过程。在恒定应力加速寿命试验下,研究了广义半正态分布的尺度参数、形状参数和几何过程的比率3个参数的估计问题。利用牛顿迭代法,得到3个参数最大似然估计值,利用最大似然估计量的渐近正态性,求出了参数的渐近置信区间及参数的bootstrap置信区间。利用R软件编程,对得到的3个参数的最大似然估计、渐近置信区间、bootstrap置信区间进行仿真模拟。

ALT技术作为可靠性研究领域的一个重要研究方向,虽然在理论和实际应用方面的研究已经取得了一定的突破和成果,但是针对目前的需求还是远远不够,还应该在以下2方面进行进一步研究:

1) 本文所提出的模型只研究了完全样本的情况, 接下来可以进一步研究基于截尾数据的可靠性评估, 以应对实际应用中数据更复杂的情况; 2) 本文只研究了最易操作和成熟的恒加速寿命试验, 但是随着产品质量的提高, 恒加速寿命试验所用的时间也在变长, 为缩短试验所用的时间, 可以进一步研究步进应力加速寿命试验和序进应力加速寿命试验, 并可以进一步拓展到多应力型加速寿命试验的统计分析上。

[参 考 文 献]

- [1] 韩为铎, 卢剑伟, 龙道江. 变刚度钢板弹簧加速寿命试验程序载荷谱编制[J]. 中国机械工程, 2017, 28(2): 144-149.
- [2] 吴松, 曹德怀. 电子产品加速寿命试验方法与工程应用[J]. 电子产品可靠性与环境试验, 2020, 38(5): 51-54.
- [3] 黄首清, 代巍, 姚泽民, 等. 两种工程化的航天器用滚动轴承加速寿命试验方法[J]. 航天器环境工程, 2021, 38(4): 413-419.
- [4] ISMAIL A A. Statistical analysis of type-I progressively hybrid censored data under constant-stress life testing model[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2019, 520: 138-150.
- [5] 王蓉华, 徐晓岭, 施宏伟. Gompertz 分布 TFR 模型多步步进应力加速寿命试验的统计分析[J]. 应用概率统计, 2009, 25(1): 47-59.
- [6] 金零, 陶波. 序进应力加速寿命试验的 Bayes 推断[J]. 数理统计与应用概率, 1996(3): 64-67.
- [7] LAM Y. Geometric process and replacement problem[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1998, 4: 366-377.
- [8] MUSTAFA K. Estimation of Weibull parameters in accelerated life testing using geometric process with type-II censored data[J]. International Journal of Engineering Sciences & Research Technology, 2013, 2(9): 2340-2347.
- [9] ZHOU K, SHI Y M, SUN T Y. Reliability analysis for accelerated life-test with progressive hybrid censored data using geometric process[J]. Journal of Physical Sciences, 2012, 16: 133-143.
- [10] COORAY K, ANANDA M M A. A generalization of the half-normal distribution with applications to lifetime data[J]. Communication in Statistics: Theory and Methods, 2008, 37: 1323-1337.
- [11] OLMOS N M, VARELA H, BOLFARINE H, et al. An extension of the generalized half-normal distribution[J]. Statistical Papers, 2014, 55: 967-981.
- [12] WANG L, SHI Y M. Estimation for constant-stress accelerated life test from generalized half-normal distribution[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2017, 28(4): 810-816.
- [13] AHMADI K, REZAEI M, YOUSEFZADEH F. Estimation for the generalized half-normal distribution based on progressive Type-II censoring[J]. Journal of Statistical Computation and Simulation, 2015, 85(6): 1128-1150.
- [14] 翟瑞彩, 谢伟松. 数值分析[M]. 天津: 天津大学出版社, 2001.
- [15] EFRON B. The jackknife, the bootstrap, and other resampling plans[M]. Philadelphia, USA: Society of Industrial and Applied Mathematics, 1982.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)