

具有饱和输出的化学反应模型的稳定性和 Hopf 分支

谭梦凡, 魏春金

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 在齐次 Neumann 边界条件下, 讨论一类具有饱和输出的化学反应模型的 Hopf 分支问题。讨论常微分系统正平衡点的存在性和稳定性, 分析 Hopf 分支的存在性、方向及稳定性; 讨论反应扩散系统的 Turing 不稳定性和 Hopf 分支。最后, 借助 Matlab 软件进行数值模拟, 验证和刻画了文中的结论。

[关键词] 饱和输出; 化学反应; Turing 不稳定性; Hopf 分支

[中图分类号] O 175.26

Hopf Bifurcation and Stability for a Chemical Reaction Model with Saturated Output

TAN Mengfan, WEI Chunjin

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, a chemical reaction model with saturated output and homogeneous Neumann boundary conditions was considered. Firstly, the stability of the positive equilibrium for the ordinary differential system was discussed, and the existence, direction and stability of Hopf bifurcation were analyzed. Secondly, the Turing instability and Hopf bifurcation were established in the corresponding reaction-diffusion system. Finally, some numerical simulations were carried out with the help of Matlab software to verify the theoretical results.

Keywords: saturated output; chemical reaction; Turing instability; Hopf bifurcation

0 引言

近年来, 生物化学反应模型中的动力学行为受到越来越多学者的关注。生物化学反应模型是一类描述生物化学反应的数学模型, 它不仅可以解释复杂的实验现象, 还可以预测反应物的变化趋势, 为实际的生产与生活提供理论依据。

文献 [1] 提出一类具有饱和输出的化学反应模型, 其化学反应机制为 $A \xrightarrow{k_1} U$ 、 $B + U \xrightarrow{k_2} V + D$, $2U + V \xrightleftharpoons[k_4]{k_3} 3U$ 、 $U \xrightarrow{k_5} E$, 其中: k_1 、 k_2 、 k_3 、 k_4 、 k_5 表示反应速率; A 、 B 为反应物; U 、 V 为中间产物; D 、 E 为生成物。并且该化学反应模型为

$$\begin{cases} du/dt = a - bu + u^2v - u^3 - du/(c + u), t > 0, \\ dv/dt = bu - u^2v + u^3, t > 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中: u 、 v 分别为中间产物 U 、 V 的浓度。文献 [1] 讨论了系统 (1) 极限环的存在性及正解的有

[收稿日期] 2022-06-17

[基金项目] 国家自然科学基金项目“渣油加氢体系催化剂级配数学模型”(22072057)

[作者简介] 通信作者: 魏春金 (1973—), 教授, 博导, 从事生物数学方向研究。E-mail: chunjinwei92@163.com

界性。

事实上,在化学反应中,物质会从浓度高的地方向浓度低的地方扩散,因此,在建立数学模型时应考虑扩散项。对于反应扩散方程,文献 [2] 根据化学反应现象并加以数学分析发现,空间扩散使得空间均匀态失去稳定性,破坏了空间原有的对称性,从而出现丰富多彩的空间斑图,有时称为 Turing 斑图。从数学角度理解,对于常微分系统,常值平衡点是稳定的,但是考虑到空间扩散,相应的反应扩散系统的常值平衡点变得不稳定,这种现象称为 Turing 不稳定性。此后,很多学者开始研究扩散引起的不稳定现象,并且发现很多化学反应都能发生这种现象。例如,文献 [3] 研究了 Lengyel-Epstein 模型平衡点的稳定性、Turing 不稳定性,证明了选择合适的参数会使空间齐次周期解不稳定;文献 [4] 讨论了一类自催化可逆生化反应模型的稳定性及 Hopf 分支。更多关于反应扩散系统的稳定性分析和 Hopf 分支的研究可以参考文献 [5-10]。

目前,带饱和输出项的反应模型研究更多关注的是常微分系统的极限环及解的有界性问题,对常微分系统 Hopf 分支和带扩散项的扩散系统的讨论较少^[11-14]。受上述工作的启发,本文在文献 [1] 的基础上,考虑在齐次 Neumann 边界条件下的反应扩散模型

$$\begin{cases} \partial u / \partial t = d_1 \Delta u + a - bu + u^2 v - u^3 - du / (c + u), x \in \Omega, t > 0, \\ \partial v / \partial t = d_2 \Delta v + bu - u^2 v + u^3, x \in \Omega, t > 0, \\ \partial u / \partial \nu = \partial v / \partial \nu = 0, x \in \partial \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), x \in \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

其中: Ω 是 $\mathbf{R}^n (n > 0)$ 中具有光滑边界 $\partial \Omega$ 的有界开区域; ν 表示 $\partial \Omega$ 上单位外法向量; u 、 v 分别表示两种反应物的浓度; d_1 、 $d_2 > 0$ 为扩散系数; Δ 为拉普拉斯算子; 系数 a 、 b 、 c 、 d 均为正实数。在文献 [1] 的基础上,讨论原系统 (1) 正平衡点的稳定性和 Hopf 分支的存在性,以及扩散系统 (2) 正平衡点的稳定性、扩散导致的 Turing 不稳定性和 Hopf 分支的性质。另外,从数学角度分析了化学反应中产生 Turing 不稳定现象的条件,给出相应扩散比的取值范围,为解释 Turing 不稳定现象提供了理论依据。

1 常微分系统的 Hopf 分支及稳定性

易知,当 $d > a$ 时,系统 (1) 有唯一的正平衡点 $E^* = (u_0, (b + u_0^2)/u_0)$, 其中 $u_0 = ca/(d - a)$ 。系统 (1) 在 E^* 处的雅可比矩阵 $J = \begin{pmatrix} b - u_0^2 - cd/(c + u_0)^2 & u_0^2 \\ -b + u_0^2 & -u_0^2 \end{pmatrix}$ 。

设系统 (1) 的特征方程为

$$\lambda^2 - T(b)\lambda + D(b) = 0, \quad (3)$$

其中: $T(b) = b - 2u_0^2 - cd/(c + u_0)^2$; $D(b) = cdu_0^2/(c + u_0)^2$ 。

下面通过选取 b 为参数来考虑系统 (1) 正平衡点 E^* 的稳定性和 Hopf 分支。设 $d > a$, 令 $b_0 = 2u_0^2 + cd/(c + u_0)^2$, 可得定理 1。

定理 1 设 $d > a$, 系统 (1) 存在正平衡点 E^* , 则: i) 当 $0 < b < b_0$ 时, 正平衡点 E^* 是局部渐近稳定的, 当 $b > b_0$ 时, 正平衡点 E^* 是不稳定的; ii) 系统 (1) 在 $b = b_0$ 处产生 Hopf 分支, 分支方向是超临界的, 且分支周期解渐近稳定。

证明 i) 当 $0 < b < b_0$ 时, $T(b) < 0$, 结合 $D(b) > 0$, 此时 J 的所有特征值均具有负实部, 正平衡点 E^* 局部渐近稳定。当 $b > b_0$ 时, $T(b) > 0$, 结合 $D(b) > 0$, 此时 J 的所有特征值均具有正实部, 正平衡点 E^* 不稳定。

ii) 当 $b = b_0$ 时, 特征方程 (3) 存在一对纯虚特征根 $\lambda = \pm i\sqrt{D(b_0)}$ 。因此, 当 b 在 b_0 附近变化时, 方程 (3) 有一对共轭复根 $\lambda = \alpha(b) \pm i\omega(b)$, 其中: $\alpha(b) = [b(c + u_0)^2 - 2u_0^2(c + u_0)^2 -$

$cd]/[2(c+u_0)^2]$; $\omega(b) = \sqrt{D(b) - (\alpha(b))^2}$ 。并且 $\alpha'(b)|_{b=b_0=1/2} > 0$, $\omega(b_0) = cd u_0^2 / (c+u_0)^2 > 0$ 。从而, 当 $b = b_0$ 时, 系统 (1) 在 E^* 处产生 Hopf 分支。

令 $\dot{u} = u - u_0$, $\dot{v} = v - (b+u_0^2)/u_0$ 。为方便计算, 仍用 u, v 表示 \dot{u}, \dot{v} , 则系统 (1) 变为

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = a - b(u+u_0) + (u+u_0)^2[v + (b+u_0^2)/u_0] - (u+u_0)^3 - d(u+u_0)/(c+u+u_0), t > 0, \\ \dot{v}(t) = b(u+u_0) - (u+u_0)^2[v + (b+u_0^2)/u_0] + (u+u_0)^3, t > 0. \end{cases} \quad (4)$$

重写式 (4) 为

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(u, v) \\ f_2(u, v) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

其中: $f_1(u, v) = [-2u_0 + b/u_0 + cd/(c+u_0)^3]u^2 + 2u_0uv + u^2v - (1 + cd/(c+u_0)^4)u^3 + O(|u|^4, |u|^3|v|)$; $f_2(u, v) = (2u_0 - b/u_0)u^2 - 2u_0uv - u^2v + u^3 + O(|u|^4, |u|^3|v|)$ 。

定义矩阵 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N(b) & M(b) \end{pmatrix}$, 其中 $\begin{pmatrix} 1 \\ N(b) - iM(b) \end{pmatrix}$ 是特征值 $\alpha(b) + i\omega(b)$ 对应的特征向量,

且 $N(b) = -b/2u_0^2 + cd/[2u_0^2(c+u_0)^2]$, $M(b) = -\sqrt{D(b) - (\alpha(b))^2}/u_0^2$ 。显然, $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -N(b)/M(b) & 1/M(b) \end{pmatrix}$ 。

当 $b = b_0$ 时, $\omega_0 = \omega(b_0) = \sqrt{D(b_0)} = \sqrt{cd}u_0/(c+u_0)$, $M_0 = M(b_0) = -\omega_0/u_0^2$, $N_0 = N(b_0) = -1$ 。

作变换 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, 则系统 (5) 变为

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}(b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F^1(x, y, b) \\ F^2(x, y, b) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

其中: $\mathbf{J}(b) = \begin{pmatrix} \alpha(b) & -\omega(b) \\ \omega(b) & \alpha(b) \end{pmatrix}$; $F^1(x, y, b) = [-2u_0 + b/u_0 + cd/(c+u_0)^3 + 2u_0N(b)]x^2 + 2u_0M(b)xy + M(b)x^2y + [-1 - cd/(c+u_0)^4 + N(b)]x^3 + O(|x|^4, |x|^3|y|)$; $F^2(x, y, b) = [(N(b)/M(b))(2u_0 - b/u_0 - cd/(c+u_0)^3 - 2u_0N(b)) + (1/M(b))(2u_0 - b/u_0 - 2u_0N(b))]x^2 + [(-N(b)/M(b))2u_0M(b) - (1/M(b))2u_0M(b)]xy + [(-N(b)/M(b))M(b) + (1/M(b))(-M(b))]x^2y + [(-N(b)/M(b))(-1 - cd/(c+u_0)^4 + N(b)) + (1/M(b))(1 - N(b))]x^3 + O(|x|^4, |x|^3|y|)$ 。

系统式 (6) 写成极坐标形式为 $\begin{cases} \dot{r} = \alpha(b)r + a(b)r^3 + \dots, \\ \dot{\theta} = \omega(b) + c(b)r^2 + \dots. \end{cases}$ 在 $b = b_0$ 处泰勒展开, 有

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha'(b_0)(b-b_0)r + a(b_0)r^3 + O((b-b_0)^2r, (b-b_0)r^3, r^5), \\ \dot{\theta} = \omega(b_0) + \omega'(b_0)(b-b_0) + c(b_0)r^2 + O((b-b_0)^2, (b-b_0)r^2, r^4). \end{cases}$$

为了判断分支周期解的稳定性, 需利用公式 $a(b_0) = (1/16)[F_{xxx}^1 + F_{xyy}^1 + F_{xxy}^2 + F_{yyy}^2] + [1/(16\omega(b_0))][F_{xy}^1(F_{xx}^1 + F_{yy}^1) - F_{xy}^2(F_{xx}^2 + F_{yy}^2) - F_{xx}^1F_{xx}^2 + F_{yy}^1F_{yy}^2]$ 计算系数 $a(b_0)$ 的符号, 所有的偏导都在 $(x, y, b) = (0, 0, b_0)$ 处计算。

由于 $F^1(x, y)$ 、 $F^2(x, y)$ 中关于 y 的最高阶次数小于 2, 所以, $F_{xyy}^1(0, 0, b_0) = F_{yyy}^2(0, 0, b_0) = F_{yy}^1(0, 0, b_0) = F_{yy}^2(0, 0, b_0) = 0$ 。进一步计算得, $F_{xxx}^1(0, 0, b_0) = -12 - 6cd/(c+u_0)^4$, $F_{xy}^1(0, 0, b_0) = -2\omega(b_0)/u_0$, $F_{xx}^1(0, 0, b_0) = -8u_0 + 2b_0/u_0 + 2cd/(c+u_0)^3$, $F_{xxy}^2(0, 0, b_0) = 0$, $F_{xx}^2(0, 0, b_0) = -2cd u_0^2 / (\omega(b_0)(c+u_0)^3)$, $F_{xy}^2(0, 0, b_0) = 0$ 。因此, $a(b_0) = (1/16)F_{xxx}^1 + [1/(16\omega(b_0))](F_{xy}^1F_{xx}^1 -$

$$F_{xx}^1 F_{xx}^2 = -1/4 - u_0/(2(c + u_0)) - cd/(4u_0^2(c + u_0)^2) - cd/(8(c + u_0)^4) < 0.$$

注意到 $\alpha'(b_0) > 0$, 由文献 [15] 中 Poincaré-Andronov-Hopf 分支定理可知, 当 $b = b_0$ 时, 系统 (1) 在正平衡点 E^* 处产生 Hopf 分支, 分支方向为超临界的, 且分支周期解渐近稳定, 定理 1 证毕。

2 扩散系统的 Turing 不稳定性、Hopf 分支方向及周期解的稳定性

2.1 扩散系统的 Turing 不稳定性

为了方便计算, 仅在一维空间 $\Omega = (0, \pi)$ 上考虑系统 (2), 即

$$\begin{cases} \partial u / \partial t = d_1 \Delta u + a - bu + u^2 v - u^3 - du / (c + u), x \in (0, \pi), t > 0, \\ \partial v / \partial t = d_2 \Delta v + bu - u^2 v + u^3, x \in (0, \pi), t > 0, \\ u_x(x, t) = v_x(x, t) = 0, x = 0, \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), x \in (0, \pi). \end{cases} \quad (7)$$

在齐次 Neumann 边界条件下, 算子 $-\Delta$ 的特征值为 $\mu_k = k^2 (k = 0, 1, 2, \dots)$, 且对应的特征函数为 $\cos(kx) (k = 0, 1, 2, \dots)$ 。

系统 (7) 在 E^* 处的线性化方程为 $\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} := L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} u_{xx} \\ v_{xx} \end{pmatrix} + J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 。其中: $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} b - u_0^2 - cd/(c + u_0)^2 & u_0^2 \\ -b + u_0^2 & -u_0^2 \end{pmatrix}$ 。

定义实 Sobolev 空间 $X = \{(u, v) \in H^2(0, \pi) \times H^2(0, \pi) : (u_x, v_x)|_{x=0, \pi} = 0\}$, X 的复延拓空间 $X_C = X \oplus iX = \{x_1 + ix_2 | x_1, x_2 \in X\}$ 。

考虑算子 L 的特征方程 $L \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}$, 其中: $\begin{pmatrix} \phi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix}$ 是算子 L 的特征值 ξ 对应的特征函数。

令 $\begin{pmatrix} \phi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} s_k \\ t_k \end{pmatrix} \cos(kx)$, 其中: s_k, t_k 是系数, 从而 $(J - \mu_k D) \begin{pmatrix} s_k \\ t_k \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} s_k \\ t_k \end{pmatrix}, k = 0, 1, 2, \dots$ 。

令 $J_k := J - \mu_k D = \begin{pmatrix} b - u_0^2 - cd/(c + u_0)^2 - \mu_k d_1 & u_0^2 \\ -b + u_0^2 & -u_0^2 - \mu_k d_2 \end{pmatrix}$, 于是 L 的所有特征值可由 J_k

的特征值给出。

设 J_k 的特征方程为

$$\xi^2 - T_k \xi + D_k = 0. \quad (8)$$

其中: $T_k = b - 2u_0^2 - \mu_k(d_1 + d_2) - cd/(c + u_0)^2$; $D_k = d_1 d_2 \mu_k^2 + [d_1 u_0^2 + (u_0^2 + cd/(c + u_0)^2 - b)d_2] \mu_k + cd u_0^2 / (c + u_0)^2$ 。

显然, 当 $b < u_0^2 + cd/(c + u_0)^2$ 时, $T_k < 0, D_k > 0, k = 0, 1, 2, \dots$, 系统 (7) 的正平衡点 E^* 局部渐近稳定。

下面考虑当 $u_0^2 + cd(c + u_0)^2 < b < 2u_0^2 + cd/(c + u_0)^2$ 时系统 (7) 正平衡点 E^* 的稳定性。显然, 在此条件下, $T_k < 0, k = 0, 1, 2, \dots$ 。

1) 当 $d_1/d_2 > b/u_0^2 - 1 - cd/(u_0^2(c + u_0)^2)$ 时, $D_k > 0$, 结合 $T_k < 0, k = 0, 1, 2, \dots$, 此时系统 (7) 的正平衡点 E^* 局部渐近稳定。

2) 当 $0 < d_1/d_2 < b/u_0^2 - 1 - cd/(u_0^2(c + u_0)^2)$ 时, D_k 的判别式为 $\Delta_1 = [d_1 u_0^2 + (u_0^2 + cd/(c + u_0)^2 - b)d_2]^2 - 4d_1 d_2 cd u_0^2 / (c + u_0)^2 = d_1^2 u_0^4 + [2u_0^2(u_0^2 + cd/(c + u_0)^2 - b) - 4cd u_0^2 / (c + u_0)^2] d_1 d_2 + (u_0^2 + cd/(c + u_0)^2 - b)^2 d_2^2$ 。右端除以 d_2^2 , 记 $z = d_1/d_2$, 则二次函数 $f(z) = u_0^4 z^2 + [2u_0^2(u_0^2 + cd/$

$(c + u_0)^2 - b) - 4cd u_0^2 / (c + u_0)^2] z + (u_0^2 + cd / (c + u_0)^2 - b)^2$ 的判别式为 $\Delta_2 = [2u_0^2(u_0^2 + cd / (c + u_0)^2 - b) - 4cd u_0^2 / (c + u_0)^2]^2 - 4u_0^4(u_0^2 + cd / (c + u_0)^2 - b)^2 = 4cd u_0^2 / (c + u_0)^2 (-4u_0^4 + 4bu_0^2) > 0$ 。

因此 $f(z) = 0$ 存在 2 个实根, 即: $z_1 = b/u_0^2 - 1 + cd/(u_0^2(c + u_0)^2) - 2/(u_0^2(c + u_0)) \sqrt{cd(b - u_0^2)}$; $z_2 = b/u_0^2 - 1 + cd/(u_0^2(c + u_0)^2) + 2/(u_0^2(c + u_0)) \sqrt{cd(b - u_0^2)}$ 。

如果 $z_1 < z < z_2$, 那么 $f(z) < 0$, 即当 $z_1 < d_1/d_2 < z_2$ 时, $\Delta_1 < 0$, 从而有 $D_k > 0, k = 0, 1, 2, \dots$ 。结合 $T_k < 0, k = 0, 1, 2, \dots$, 此时系统 (7) 的正平衡点 E^* 局部渐近稳定。

经计算可知, $z_1 < b/u_0^2 - 1 - cd/(u_0^2(c + u_0)^2) < z_2$, 由 1)、2) 可得, 当 $d_1/d_2 > z_1$ 时, 系统 (7) 的正平衡点 E^* 局部渐近稳定。由上述分析可得定理 2。

定理 2 设 $d > a$, 系统 (7) 存在正平衡点 E^* , 则: i) 当 $b > 2u_0^2 + cd/(c + u_0)^2$ 时, 系统 (7) 的正平衡点 E^* 不稳定, 当 $b < u_0^2 + cd/(c + u_0)^2$ 时, 系统 (7) 的正平衡点 E^* 局部渐近稳定; ii) 当 $u_0^2 + cd/(c + u_0)^2 < b < 2u_0^2 + cd/(c + u_0)^2$ 时, 若 $d_1/d_2 > z_1$, 则系统 (7) 的正平衡点 E^* 局部渐近稳定。

下面讨论 $0 < d_1/d_2 < z_1$ 的情形。此时, $\Delta_1 > 0$, 从而方程 $d_1 d_2 \mu^2 + [d_1 u_0^2 + (u_0^2 + cd/(c + u_0)^2 - b)d_2] \mu + cd u_0^2 / (c + u_0)^2 = 0$ 存在 2 个正实根, 即: $\mu_- = (R - \sqrt{R^2 - 4d_1 d_2 D}) / (2d_1 d_2)$; $\mu_+ = (R + \sqrt{R^2 - 4d_1 d_2 D}) / (2d_1 d_2)$, 其中: $R \triangleq d_1 A + d_2 N = -d_1 u_0^2 - (u_0^2 + cd/(c + u_0)^2 - b)d_2$; $D = cd u_0^2 / (c + u_0)^2$ 。

当 $u_0^2 + cd/(c + u_0)^2 < b < 2u_0^2 + cd/(c + u_0)^2$ 时, $\mu_+ = 1/(2d_1)[d_1/d_2 A + N + \sqrt{(d_1/d_2 A + N)^2 - 4d_1 D/d_2}]$ 。令 $H(d_2) = (d_1/d_2)A + N + \sqrt{((d_1/d_2)A + N)^2 - 4d_1 D/d_2}$, 则 $H'(d_2) = -d_1 A/d_2^2 + (1/2)[(d_1/d_2 A + N)^2 - 4d_1 D/d_2]^{-1/2}[2((d_1/d_2)A + N)(-d_1 A/d_2^2) + 4d_1 D/d_2^2] = -d_1 A/d_2^2 + [(-d_1 A/d_2^2)((d_1/d_2)A + N) + 2d_1 D/d_2^2] / \sqrt{((d_1/d_2)A + N)^2 - 4d_1 D/d_2}$ 。

由于 $A < 0, N > 0$, 且当 $0 < d_1/d_2 < z_1$ 时, $(d_1/d_2)A + N > 0$ 。于是, 对所有的 $d_2 > 0$, 有 $H'(d_2) > 0$, 即 μ_+ 关于 d_2 单调递增。

定义 $\Phi_1 = \{\mu | \mu \geq 0, \mu_- < \mu < \mu_+\}$, $\Phi_2 = \{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots\}$, 要使不等式 $0 < d_1/d_2 < z_1$ 成立, 可以固定 d_1 而取 d_2 足够大, 或固定 d_2 而取 d_1 足够小。

1) 固定 d_1 且令 $d_2 \rightarrow \infty$, 则 $\lim_{d_2 \rightarrow \infty} \mu_- = 0, \lim_{d_2 \rightarrow \infty} \mu_+ = b - u_0^2/d_1 - cd/(d_1(c + u_0))$, 从而对所有 $d_2 > 0$, 有 $0 < \mu_+ < (b - u_0^2)/d_1 - cd/(d_1(c + u_0)^2)$ 。如果 $\mu_1 > b - u_0^2/d_1 - cd/(d_1(c + u_0)^2)$, 那么 $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$, 即对所有的 $k \in N, D_k > 0$ 且 $T_k < 0$, 故系统 (7) 的正平衡点 E^* 局部渐近稳定。

2) 固定 d_2 且令 $d_1 \rightarrow 0$, 则 $\lim_{d_1 \rightarrow 0} \mu_- = cd u_0^2 / (d_2(b - u_0^2)(c + u_0)^2 - cdd_2), \lim_{d_1 \rightarrow 0} \mu_+ = \infty$, 因此, 存在 $\tilde{d} > 0$, 使得当 $0 < d_1 < \tilde{d}$ 时, $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$, 从而系统 (7) 的正平衡点 E^* 不稳定。

由上述分析, 可得定理 3。

定理 3 设 $d > a, u_0^2 + cd/(c + u_0)^2 < b < 2u_0^2 + cd/(c + u_0)^2$, 系统 (7) 存在正平衡点 E^* , 则: i) 若 $\mu_1 > (b - u_0^2)/d_1 - cd/(d_1(c + u_0)^2)$, 则对固定 $d_1 > 0$ 和所有 $d_2 > 0$, 系统 (7) 的正平衡点 E^* 局部渐近稳定; ii) 对固定 $d_2 > 0$, 存在 $\tilde{d} > 0$, 使得当 $0 < d_1 < \tilde{d}$ 时, 系统 (7) 的正平衡点 E^* 是 Turing 不稳定的。

注 1 对于常微分系统 (1), 当参数 b 满足 $0 < b < 2u_0^2 + cd/(c + u_0)^2$ 时, 正平衡点 E^* 是局部渐近稳定的。考虑扩散项的扰动后, 扩散比对正平衡点的稳定性会产生影响。具体来说, 当 $u_0^2 + cd/(c + u_0)^2 < b < 2u_0^2 + cd/(c + u_0)^2$, 扩散系数 d_1 充分小且扩散比 $d_1/d_2 < z_1$ 时, 扩散系统 (7) 的正平衡点 E^* 不稳定。与常微分系统 (1) 比较发现, 扩散在一定条件可以使稳定的平衡点变得不稳定, 也就是 Turing 不稳定发生。

2.2 Hopf 分支方向和分支周期解的稳定性

定理 4 如果 $d_1/d_2 > \tilde{z}$, 那么系统 (7) 在 $b = b_0$ 处产生 Hopf 分支, 分支方向为超临界的, 且分支周期解渐近稳定, 其中 $\tilde{z} = 1 + 2/[u_0^2(c + u_0)][cd/(c + u_0) - \sqrt{cd u_0^2 + c^2 d^2/(c + u_0)^2}]$ 。

证明 如果 $b = b_0$, 那么 $T_0 = 0$ 且 $D_0 > 0$ 。由于 $\mu_k > 0 (k \geq 1)$ 且 $d_1, d_2 > 0$, 于是对所有的 $k \geq 1$, 有 $T_k(b_0) < 0$ 。此时, $D_k(b_0) = d_1 d_2 \mu_k^2 + [u_0^2(d_1 - d_2)]\mu_k + c d u_0^2/(c + u_0)^2$ 。

由前面的计算可知, 当 $d_1/d_2 > \tilde{z}$ 时, 对任意的 $k \geq 1$, 都有 $D_k(b_0) > 0$ 。因此, 当 $b = b_0$ 时, 算子 L 除一对纯虚特征根外, 其他特征值均具有负实部。另外, 设 $\xi(b) = \alpha(b) \pm i\omega(b)$ 是方程 (8) 的一对共轭复根, 则 $\alpha(b) = T_k/2 = (1/2)[b - 2u_0^2 - cd/(c + u_0)^2] - \mu_k(d_1 + d_2)/2$, $\omega(b) = \sqrt{D_k(b) - (\alpha(b))^2}$, 且 $\alpha'(b)|_{b=b_0} = 1/2 > 0$ 。因此, 当 $b = b_0$ 时, 系统 (7) 在 E^* 处产生 Hopf 分支。

在 $b = b_0$ 处, 系统 (7) 可以写成 $dU/dt = LU + F_0(U)$ 。其中: $F_0(U) = \begin{pmatrix} f_1(u, v) \\ f_2(u, v) \end{pmatrix}$; $U = (u, v)^T$ 。

设 L^* 是算子 L 的伴随算子, 定义 $L^* \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} u_{xx} \\ v_{xx} \end{pmatrix} + J^* \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 。其中: $J^* = J^T = \begin{pmatrix} b - u_0^2 - cd/(c + u_0)^2 & -b + u_0^2 \\ u_0^2 & -u_0^2 \end{pmatrix}$ 。

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为空间 X_C 上的内积, 定义为 $\langle U_1, U_2 \rangle = \int_0^\pi (\bar{u}_1 u_2 + \bar{v}_1 v_2) dx$ 。其中: $U_i = (u_i, v_i)^T, i = 1, 2$ 。注意到 $\langle \lambda U_1, U_2 \rangle = \bar{\lambda} \langle U_1, U_2 \rangle$ 。

假设 $b = b_0$ 处 L 有一对纯虚根为 $\pm i\omega_0$ 。令 $q = \begin{pmatrix} s_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + \omega_0/u_0^2 i \end{pmatrix}$, $q^* = \begin{pmatrix} s_0^* \\ t_0^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/(2\pi) + u_0^2/(2\pi\omega_0)i \\ u_0^2/(2\pi\omega_0)i \end{pmatrix}$, 满足 $\langle q^*, q \rangle = 1$, $\langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$, $L(b_0)q = i\omega_0 q$, $L^*(b_0)q^* = -i\omega_0 q^*$ 。

进行空间分解 $X = X^C \oplus X^S$, 其中: $X^C = \{zq + \bar{z}\bar{q} | z \in C\}$; $X^S = \{u \in X | \langle q^*, u \rangle = 0\}$ 。

对任意的 $(u, v) \in X$, 存在 $z \in C$ 及 $w = (w_1, w_2) \in X^S$, 使得 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = zq + \bar{z}\bar{q} + (w_1, w_2) = \begin{pmatrix} z + \bar{z} + w_1 \\ z(-1 + \omega_0/u_0^2 i) + \bar{z}(-1 - \omega_0/u_0^2 i) + w_2 \end{pmatrix}$, 从而系统 (7) 可以化为以 (z, w) 为坐标的系统 $\begin{cases} dz/dt = i\omega_0 z + \langle q^*, F_0 \rangle, \\ dw/dt = Lw + H(z, \bar{z}, w). \end{cases}$ 其中: $H(z, \bar{z}, w) = F_0 - \langle q^*, F_0 \rangle q - \langle \bar{q}^*, F_0 \rangle \bar{q}$; $F_0 := F_0(zq + \bar{z}\bar{q} + w)$ 。

如同文献 [15], 将 F_0 写成 $F_0(U) = (1/2)Q(U, U) + (1/6)C(U, U, U) + O(|U|^4)$ 。其中: $U = (u, v)^T$ 。

令 $f(u, v, b) = a - bu + u^2 v - u^3 - du/(c + u)$, $g(u, v, b) = bu - u^2 v + u^3$, 下面计算 Q_{qq} 、 $Q_{q\bar{q}}$ 和 $C_{qq\bar{q}}$, 具体公式分别为: $Q_{qq} = \begin{pmatrix} c_0 \\ d_0 \end{pmatrix}$, $Q_{q\bar{q}} = \begin{pmatrix} e_0 \\ f_0 \end{pmatrix}$, $C_{qq\bar{q}} = \begin{pmatrix} g_0 \\ h_0 \end{pmatrix}$ 。其中: $c_0 = f_{uu}s_0^2 + 2f_{uv}s_0 t_0 + f_{vv}t_0^2$; $d_0 = g_{uu}s_0^2 + 2g_{uv}s_0 t_0 + g_{vv}t_0^2$; $e_0 = f_{uu}|s_0|^2 + f_{uv}(s_0 \bar{t}_0 + \bar{s}_0 t_0) + f_{vv}|t_0|^2$; $f_0 = g_{uu}|s_0|^2 + g_{uv}(s_0 \bar{t}_0 + \bar{s}_0 t_0) + g_{vv}|t_0|^2$; $g_0 = f_{uuu}|s_0|^2 s_0 + f_{uuv}(2|s_0|^2 t_0 + s_0^2 \bar{t}_0) + f_{uvv}(2|t_0|^2 s_0 + t_0^2 \bar{s}_0) + f_{vvv}|t_0|^2 t_0$; $h_0 = g_{uuu}|s_0|^2 s_0 + g_{uuv}(2|s_0|^2 t_0 + s_0^2 \bar{t}_0) + g_{uvv}(2|t_0|^2 s_0 + t_0^2 \bar{s}_0) + g_{vvv}|t_0|^2 t_0$ 。 f 和 g 的所有偏导数都在 $(0, 0, b_0)$ 处计算。

因此, $c_0 = -4u_0 + 2cd/(u_0(c+u_0)^2) + 2cd/(c+u_0)^3 + 4\omega_0/u_0 i$, $d_0 = 4u_0 - 2cd/(u_0(c+u_0)^2) - 4\omega_0/u_0 i$, $e_0 = -4u_0 + 2cd/(u_0(c+u_0)^2) + 2cd/(c+u_0)^3$, $f_0 = 4u_0 - 2cd/(u_0(c+u_0)^2)$, $g_0 = -12 - 6cd/(c+u_0)^4 + 2\omega_0/u_0^2 i$, $h_0 = 12 - 2\omega_0/u_0^2 i$, 且 $\langle q^*, Q_{qq} \rangle = -2u_0 + cd/(u_0(c+u_0)^2) + cd/(c+u_0)^3 + (2\omega_0/u_0 - cdu_0^2/(\omega_0(c+u_0)^3))i$, $\langle q^*, Q_{q\bar{q}} \rangle = -2u_0 + cd/(u_0(c+u_0)^2) + cd/(c+u_0)^3 - cdu_0^2/(\omega_0(c+u_0)^3)i$, $\langle q^*, C_{qq\bar{q}} \rangle = -6 - 3cd/(c+u_0)^4 + (\omega_0/u_0^2 + 3cdu_0^2/(\omega_0(c+u_0)^4))i$ 。

令 $H(z, \bar{z}, w) = H_{20}z^2/2 + H_{11}z\bar{z} + H_{02}\bar{z}^2/2 + o(|z|^3) + o(|z||w|)$, $H_{20} = Q_{qq} - \langle q^*, Q_{qq} \rangle q - \langle \bar{q}^*, Q_{qq} \rangle \bar{q} = 0$, $H_{11} = Q_{q\bar{q}} - \langle q^*, Q_{q\bar{q}} \rangle q - \langle \bar{q}^*, Q_{q\bar{q}} \rangle \bar{q} = 0$ 。结合 $w_{20} = (2i\omega_0 I - L(b_0))^{-1}H_{20}$ 和 $w_{11} = -(L(b_0))^{-1}H_{11}$, 于是 $w_{20} = w_{11} = 0$ 。从而 $\langle q^*, Q_{w_{11}q} \rangle = \langle q^*, Q_{w_{20}\bar{q}} \rangle = 0$ 。因此, $\text{Re}(c_1(b_0)) = \text{Re}[i/(2\omega_0)\langle q^*, Q_{qq} \rangle \langle q^*, Q_{q\bar{q}} \rangle + (1/2)\langle q^*, C_{qq\bar{q}} \rangle] = -[(u_0^2 + cd/(c+u_0)^2)(c+u_0)^4 + 2u_0^3(c+u_0)^3 + (1/2)cdu_0^2]/(u_0^2(c+u_0)^4) < 0$ 。

注意到 $\alpha'(b_0) > 0$, 因此, 系统 (7) 在 $b = b_0$ 处产生 Hopf 分支, 分支方向为超临界的, 且分支周期解渐近稳定。定理 4 证毕。

3 数值模拟结果

为了验证上述理论结果, 本文利用 Matlab 软件给出具体的数值实例 (参数取值见表 1), 对所得的理论结果进行验证。

表 1 参数值
Tab. 1 Parameters value

| 序号 | 参数取值 | 分支参数取值范围 | 正平衡点 E^* 稳定性 |
|----|--------------------------|--|----------------|
| 1 | $a=0.5, c=3, d=2$ | $0 < b < 2.375$ | 局部渐近稳定 |
| | | $b > 2.375$ | 不稳定 |
| | | $d_1/d_2 > 0.1503$ | 局部渐近稳定 |
| 2 | $a=0.5, b=2, c=3, d=2$ | $0 < d_1/d_2 < 0.1503$ 且 $d_1 > 0.625$ | 局部渐近稳定 |
| | | $0 < d_1/d_2 < 0.1503$ 且 $d_1 < 0.625$ | Turing 不稳定 |
| 3 | $a=0.5, b=2.8, c=3, d=2$ | $d_1/d_2 > 0.3163$ | 不稳定 |

对常微分系统 (1), 取表 1 中序号 1 的参数值, 则 $u_0 = 1$, $b_0 = 2.375$, $E^* = (1, 3.375)$ 。若取 $b = 2.3 < 2.375$, 此时 $T < 0$, $D > 0$, 则正平衡点 E^* 渐近稳定, 如图 1 所示; 若取 $b = 2.47 > b_0$, 由定理 1 可知, 当 b 经过 b_0 时, 平衡点 E^* 失去稳定性, 并在 b_0 附近产生 Hopf 分支, Hopf 分支的方向是超临界的, 且分支周期解是轨道渐近稳定的, 如图 2 所示。初始值均取 $(u_0, v_0) = (1, 3.5)$ 。

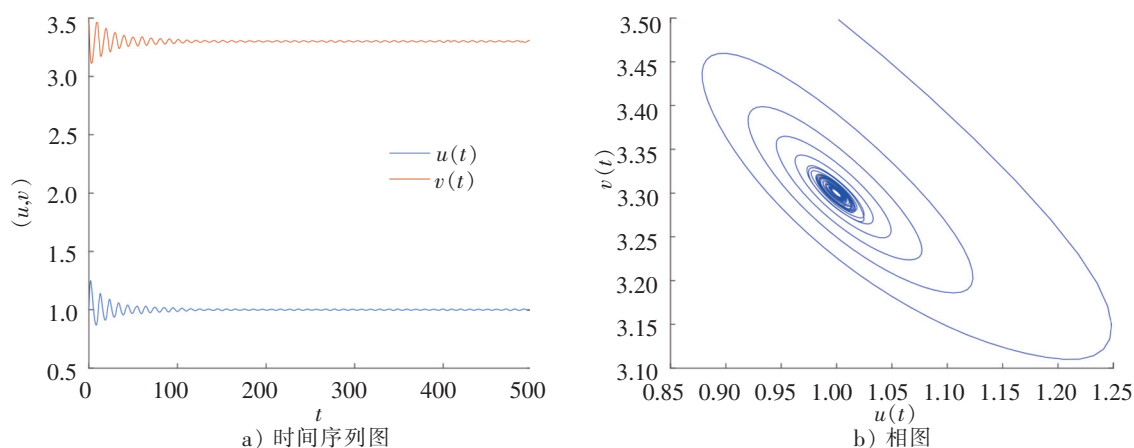
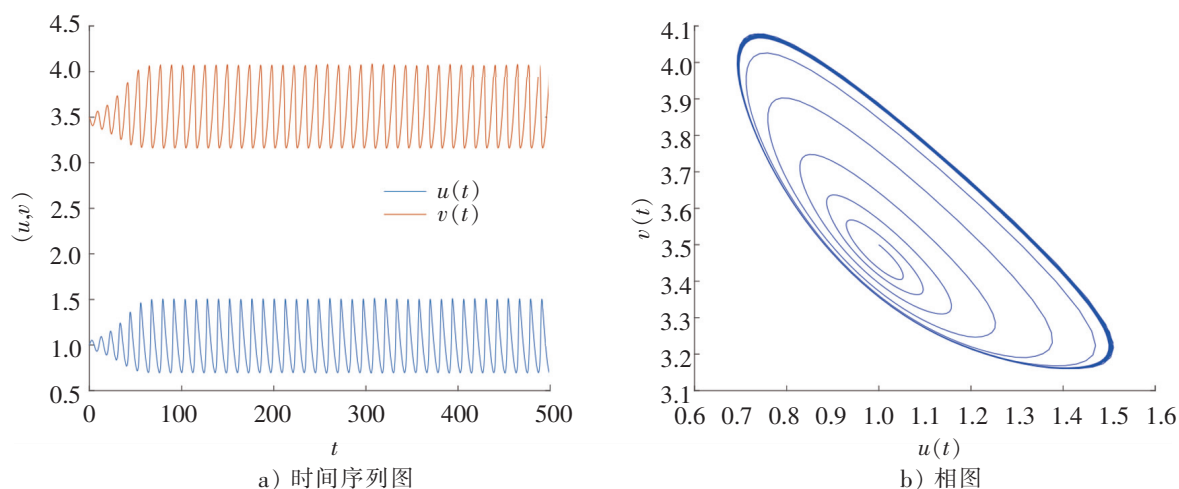


图 1 系统(1)的正平衡 E^* 渐近稳定 ($b=2.3 < b_0$)

Fig.1 Asymptotically stability for the positive equilibrium E^* of system (1) ($b=2.3 < b_0$)

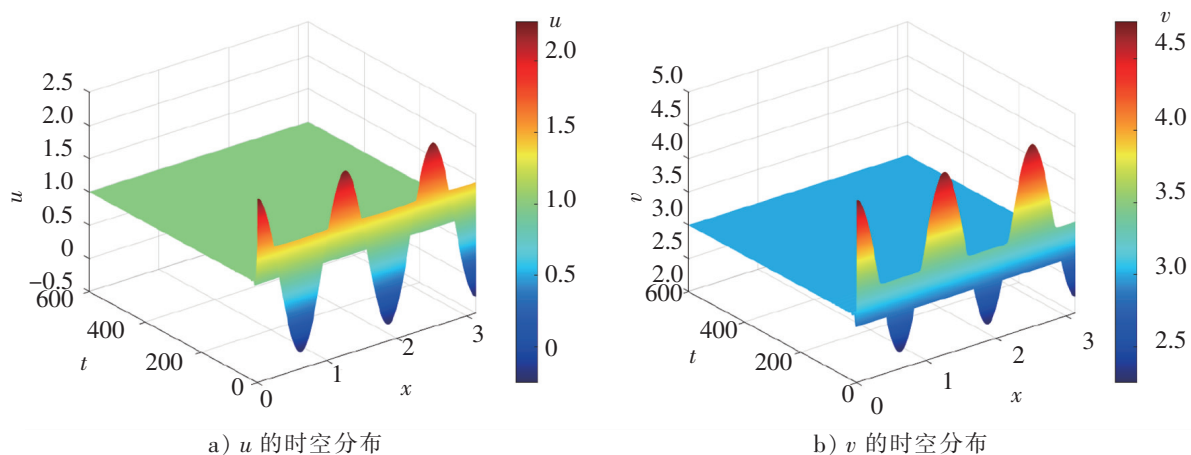
图 2 系统(1) 产生的稳定周期解 ($b=2.47>b_0$)Fig.2 Stable periodic solutions of system (1) ($b=2.47>b_0$)

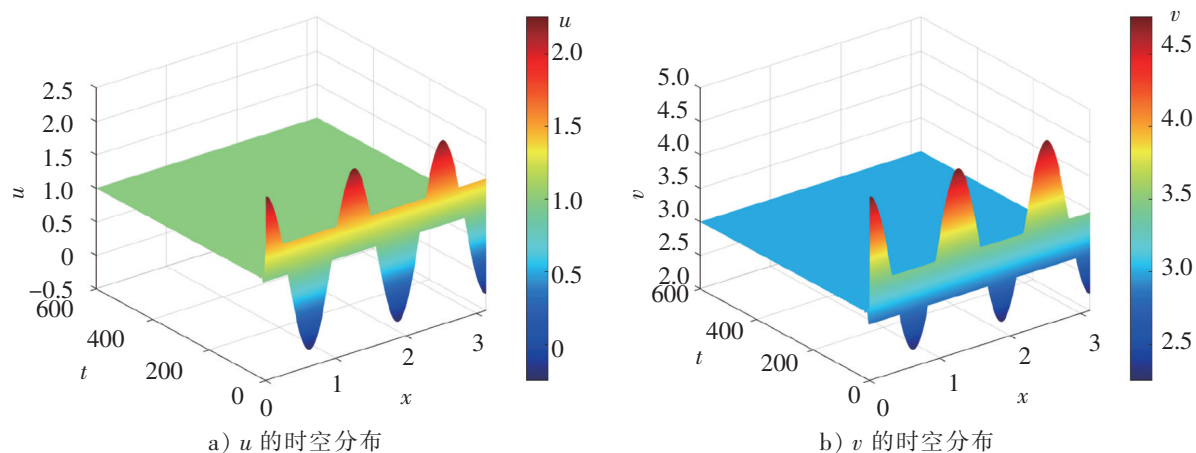
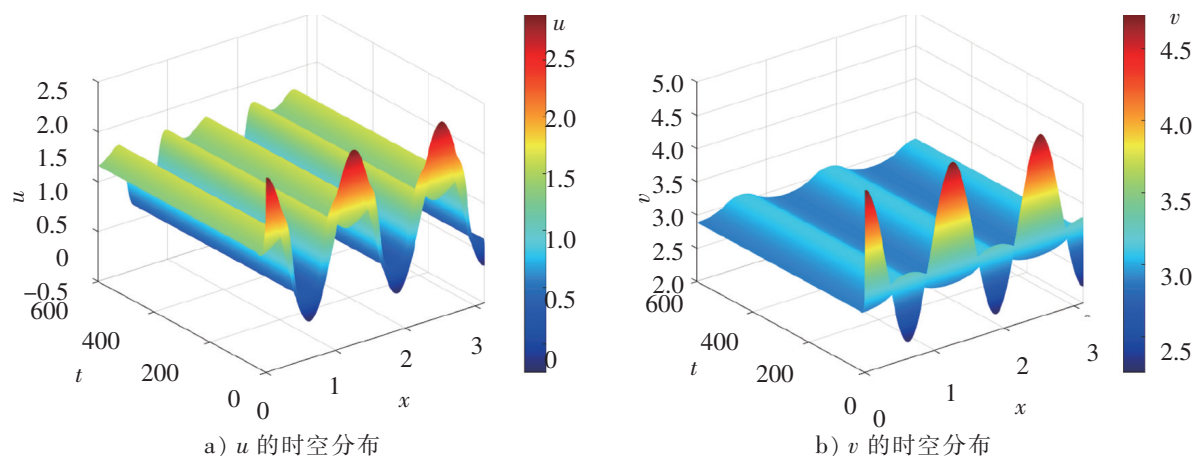
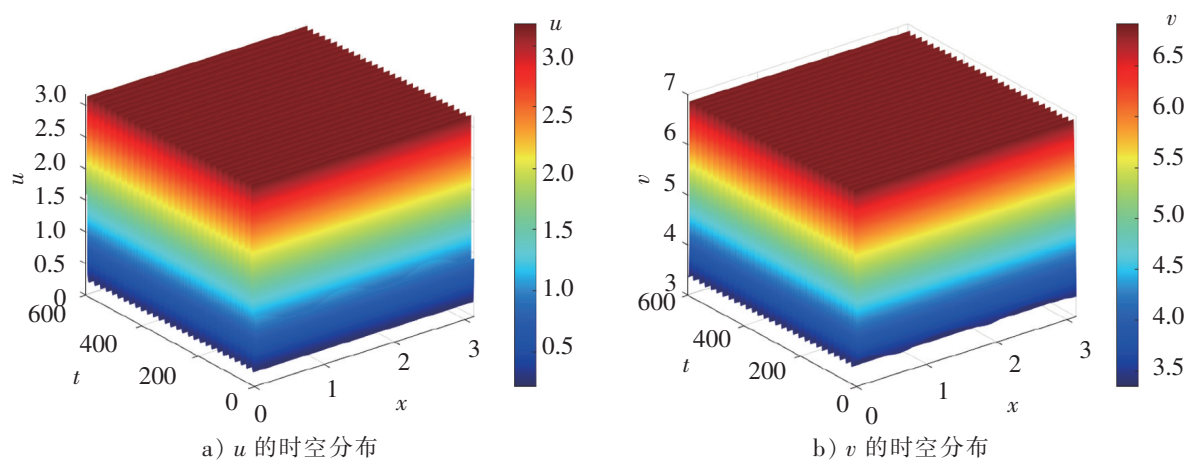
对扩散系统 (7), 取表 1 中序号 2 的参数值, 则 $z_1 = 0.150\ 3$, $E^* = (1, 3)$ 。如果 $d_1 = 0.16$, $d_2 = 1$, 那么 d_1, d_2 满足 $d_1/d_2 > z_1$ 。由定理 2 可知, 系统 (7) 的正平衡点 E^* 局部渐近稳定, 如图 3 所示。

如果 $d_1 = 0.7$, $d_2 = 5$, 那么 d_1, d_2 满足 $0 < d_1/d_2 < 0.150\ 3$, 但 $\mu_1 > (b - u_0^2)/d_1 - cd/(d_1(c + u_0)^2)$ 。由定理 3 可知, 系统 (7) 的正平衡点 E^* 局部渐近稳定, 如图 4 所示。

如果 $d_1 = 0.001$, $d_2 = 0.1$, 那么 d_1, d_2 满足 $0 < d_1/d_2 < 0.150\ 3$, 但 $\mu_1 < (b - u_0^2)/d_1 - cd/(d_1(c + u_0)^2)$ 。由定理 3 可知, 系统 (7) 的正平衡点 E^* 是 Turing 不稳定的, 系统可能出现非常数稳态分支, 如图 5 所示。初始值均取 $(u_0, v_0) = (1 + 1.25\cos(5x), 3.5 + 1.25\cos(5x))$ 。

对扩散系统 (7), 取表 1 中序号 3 的参数值, 则 $\bar{z} = 0.316\ 3$ 。如果 $d_1 = 0.32$, $d_2 = 1$, 则 d_1, d_2 满足条件 $d_1/d_2 > 0.316\ 3$, 由定理 4 可知, 系统 (7) 存在稳定的 Hopf 分支周期解, 如图 6 所示。初始值取 $(u_0, v_0) = (1 + 0.1\cos(5x), 3.5 + 0.1\cos(5x))$ 。

图 3 系统(7)正平衡点 E^* 局部渐近稳定 ($d_1=0.16, d_2=1$)Fig.3 Local asymptotically stability for the positive equilibrium E^* of system (7) ($d_1=0.16, d_2=1$)

图4 系统(7)正平衡点 E^* 局部渐近稳定 ($d_1=0.7, d_2=5$)Fig.4 Local asymptotically stability for the positive equilibrium E^* of system (7) ($d_1=0.7, d_2=5$)图5 系统(7)正平衡点 E^* 局部渐近稳定 ($d_1=0.001, d_2=0.1$)Fig.5 Local asymptotically stability the positive equilibrium E^* of system (12) ($d_1=0.001, d_2=0.1$)图6 系统(7)存在的稳定 Hopf 分支周期解 ($d_1=0.32, d_2=1$)Fig.6 Stable Hopf bifurcation periodic solutions of system (7) ($d_1=0.32, d_2=1$)

4 结论

本文在常微分模型 (1) 的基础上添加扩散项, 在 Neumann 边界条件下, 讨论反应扩散系统 (2) 的动力学性质。对文献 [1] 中的研究内容加以补充和拓展, 以 b 为分支参数, 分别给出常微分系统 (1) 和扩散系统 (2) 的 Hopf 分支及稳定性。特别对扩散系统 (2), 给出扩散比对系统稳定性的影响。当参数 b 满足 $u_0^2 + cd/(c + u_0)^2 < b < 2u_0^2 + cd/(c + u_0)^2$ 时, 稳定的正平衡点会因为扩散比的变化可能失去稳定性。结果表明, 当扩散比 $d_1/d_2 > z_1$ 时, 扩散系统的正平衡点是局部渐近稳定的; 当扩散系数 d_1 充分小且扩散比 $d_1/d_2 < z_1$ 时, 正平衡点是 Turing 不稳定的。

[参考文献]

- [1] 贾建文. 一类生化反应模型的定性分析[J]. 山西师范大学学报(自然科学版), 2002, 16(3): 6-9.
- [2] TURING A M. The chemical basis of morphogenesis[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series B, Biological Sciences, 1952, 237(641): 37-72.
- [3] YI F Q, WEI J J, SHI J P. Diffusion-driven instability and bifurcation in the Lengyel-Epstein system[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2008, 9(3): 1038-1051.
- [4] 郭改慧, 刘晓慧. 一类自催化可逆生化反应模型的 Hopf 分支及其稳定性[J]. 数学物理学报, 2021, 41(1): 166-177.
- [5] YI F Q, WEI J J, SHI J P. Bifurcation and spatiotemporal patterns in a homogeneous diffusive predator-prey system[J]. Journal of Differential Equations, 2009, 246(5): 1944-1977.
- [6] ZHOU J. Spatiotemporal pattern formation of a diffusive bimolecular model with auto-catalysis and saturation law[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2013, 66(10): 2003-2018.
- [7] 徐士河. 具有扩散病毒感染群体动力学模型的稳定性与 Hopf 分歧[J]. 系统科学与数学, 2012, 32(1): 104-110.
- [8] LI B, WANG M X. Diffusion-driven instability and Hopf bifurcation in Brusselator system[J]. Applied Mathematics & Mechanics, 2008, 29(6): 825-832.
- [9] YAN X P, ZHANG P, ZHANG C H. Turing instability and spatially homogeneous Hopf bifurcation in a diffusive Brusselator system[J]. Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 2020, 25(4): 638-657.
- [10] 宋国华, 李秀琴, 窦家维. Chemostat 系统中 Hopf 分支的存在性[J]. 系统科学与数学, 2001, 21(4): 486-490.
- [11] 聂益民. 一类可逆多分子饱和生化反应系统的非线性分析[J]. 生物数学学报, 2005, 20(1): 33-36.
- [12] 赵刚, 刘学生. 可逆三分子反应模型的极限环存在性和唯一性[J]. 大连大学学报, 2009, 30(3): 7-9.
- [13] 冯光庭, 张兴安. 一类具有二重饱和度的多分子可逆生化反应系统的定性分析[J]. 应用数学, 2012, 25(4): 810-815.
- [14] 曾广洪, 刘华祥, 吴庆初. 可逆多分子饱和反应动力系统的极限环及其数值模拟[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2016, 40(1): 43-46.
- [15] HASSARD B D, KAZARINOFF N D, WAN Y H. Theory and applications of Hopf bifurcation[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)