第29卷 第6期　集美大学学报（自然科学版）　Vol. 29 No. 6
2024年11月　Journal of Jimei University (Natural Science)　Nov. 2024

［文章编号］1007－7405(2024)06－0488－07　DOI: 10.19715/j.jmuzr.2024.06.02

一类高斯过程的碰撞概率

朱燕芹，倪文清

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

［摘要］令 $X=\{X(t),t\in\mathbf{R}\}$ 是由 $X(t)=(X_1(t),\cdots,X_d(t))(\forall_t\in\mathbf{R})$ 定义在 $\mathbf{R}^d$ 上的高斯过程，其中 $X_1,\cdots,X_d$ 独立同分布于一个实值高斯过程 $X_0=\{X_0(t),t\in\mathbf{R}\}$，且 $\boldsymbol{E}[(X_0(t)-X_0(s))^2]\approx\gamma^2(|t-s|)$（$f\approx g$ 表示存在常数 c，使得 $c^{-1}g\leqslant f\leqslant cg$），$\gamma$ 是满足一定条件且具有上下指数的函数。利用 γ 的上下指数研究该过程碰撞概率，其上界的 Hausdorff 测度由 γ 的上指数 α^* 确定，而下界的容量由下指数 α_* 确定。

［关键词］碰撞概率；高斯过程；容量；Hausdorff 测度；上指数；下指数

［中图分类号］O 211.6

Hitting Probabilities for a Class of Gaussian Processes

ZHU Yanqin, NI Wenqing

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: Let $X=\{X(t),t\in\mathbf{R}\}$ be a Gaussian process with values in $\mathbf{R}^d$ defined by $X(t)=(X_1(t),\cdots,X_d(t))(\forall t\in\mathbf{R})$, where $X_1,\cdots,X_d$ are independent copies of a real-valued Gaussian process $X_0=\{X_0(t),t\in\mathbf{R}\}$ and $\boldsymbol{E}[(X_0(t)-X_0(s))^2]\approx\gamma^2(|t-s|)$ ($f\approx g$ indicates that there is a constant c, such that $c^{-1}g\leqslant f\leqslant cg$), γ is a function that satisfies certain conditions and has upper and lower indices. The purpose of this paper is to study the hitting probabilities of the process by using the upper and lower indices of γ. The Hausdorff measure of the upper bound is determined by the upper indices α^* of the function γ, and the capacity of lower bound by the lower indices α_*.

Keywords: hitting probabilities; Gaussian processes; capacity; Hausdorff measure; upper indices; lower indices

0　引言

随机过程或随机场的碰撞概率一直都是许多学者的研究热点。碰撞概率描述了给定过程到达某一状态或状态集 F 的概率，通过 Hausdorff 测度和状态集 F 的容量来确定碰撞概率的上下界是概率位势理论中的基本问题。文献［1］用 Bessel-Riesz 容量确定布朗单碰撞概率的上下界，但这一结果只适用于具有平稳独立增量性质的随机过程或随机场。此后，许多学者对一般条件的随机场或随机过程的碰撞概率进行大量研究，其碰撞概率的上界不再用容量表示，而用 Hausdorff 测度来表示。如文献［2］用 Hausdorff 测度确定非线性随机热方程的碰撞概率的上界；文献［3－4］用 Hausdorff 测度确定

［收稿日期］2022－04－27
［基金项目］福建省中青年教师教育科研基金项目“各向异性随机场的几何性质及其应用”（JAT210228）；集美大学科研基金资助项目“各向异性随机场轨道的分形性质及应用”（ZP2022014）
［作者简介］通信作者：倪文清（1977—），副教授，硕导，从事概率论与随机分析研究。E-mail: wqni@jmu.edu.cn

各向异性高斯随机场的碰撞概率的上界。最近，文献［5－6］分别利用 Hausdorff 测度和 Bessel-Riesz 容量确定过程碰撞概率的上下界。

注意到文献［3－4］各向异性高斯过程的协方差结构较为具体，仅为 $\mathbf{R}^N$ 上的各种度量确定。但不是每一个随机场的协方差结构可被这些具体的度量确定。如文献［7］研究的可协调型多参数 mfBm，受其逐点赫尔德指数的影响，其协方差结构不能为 $\mathbf{R}^N$ 上度量确定。而文献［6，8］研究高斯过程的协方差结构由函数 γ_0 确定，其中 γ_0 是连续、严格递增，在 0 附近是凸的，且满足 $\lim\limits_{r\to 0}\gamma_0 = 0$ 的函数。具有这样条件的 γ_0 不受幂类型和近似自相似性的限制，且可以找到仅依赖于它的最优核函数，从而得到与该最优核函数有关的 Hausdorff 测度和容量来确定碰撞概率的上下界，但条件不好验证。本文考虑的这类高斯过程的协方差结构由函数 γ 确定，γ 所需条件比 γ_0 较弱，为非降、右连续且 $\gamma(0+) = 0$ 的一个函数。另外，γ 还具有上下指数。自然地，引出一个问题，是否可以利用 γ 的上下指数来研究高斯过程 X 的碰撞概率？

文献［4］给出在 $\mathbf{R}^d$ 上满足一定条件的实值各向异性高斯随机场 X 的碰撞概率，文献［9］改进文献［4］建立的结果，给出碰撞概率估计

$$c^{-1}C_{\rho_H,d}(E\times F) \leqslant P\{X(E)\cap F\neq \boldsymbol{\phi}\} \leqslant cH^d_{\rho_H}(E\times F)。\tag{1}$$

其中：$E\subseteq[\varepsilon',1]^N, \varepsilon'\in(0,1)$；$F\subseteq\mathbf{R}^d$ 是 Borel 集；$H=(H_1,H_2,\cdots,H_N)\in(0,1)^N$；$c$ 是依赖 $[\varepsilon',1]^N$、F、H 的有限常数；ρ_H 是 $\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^d$ 上的度量，即对任意的 $(s,x),(t,y)\in\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^d$，$\rho_H((s,x),(t,y)) = \max\{\sum\limits_{j=1}^N|s_j-t_j|^{H_j},\|x-y\|\}$。

事实上，本文研究的高斯随机过程满足类似文献［4］的条件，因此通过对标准证明进行适当的调整，下界的估计仍然利用二阶矩讨论，上界的估计通过简单的覆盖讨论，可以得到类似式（1）的估计，即 $c_1C_{\rho_{\alpha_1},d}(E\times F)\leqslant P\{X(E)\cap F\neq\boldsymbol{\phi}\}\leqslant c_2H^d_{\rho_{\alpha_2}}(E\times F)$，其中：$\alpha_1\in(\alpha_*,1)$；$\alpha_2\in(0,\alpha^*)$。进一步，由 β_1 满足 $0<\beta_1/\alpha_*<\dim(E)\leqslant\alpha_*d$，$\beta_2$ 满足 $0<\overline{\dim}_M(E)\leqslant\alpha_2\beta_2/\alpha^*$，且 $\beta_2<\alpha^*d$ 可以得到估计 $c_3C_{d-\beta_1/\alpha_*}(F)\leqslant P\{X(E)\cap F\neq\boldsymbol{\phi}\}\leqslant c_4H_{d-\beta_2/\alpha^*}(F)$。

1 预备知识

文中，假设 $X=\{X(t),t\in\mathbf{R}\}$ 是 $\mathbf{R}^d$ 上的高斯随机过程，其中

$$X(t) = (X_1(t),X_2(t),\cdots,X_d(t)),\forall t\in\mathbf{R},\tag{2}$$

这里的分量过程 $X_1,X_2,\cdots,X_d$ 独立同分布于实值中心化高斯随机过程 X_0，且 $X_0(0)=0$。假设 X_0 满足：（C1）存在正常数 c_5、c_6 和一个非降右连续函数 $\gamma:[0,\infty)\to[0,\infty)$，且 $\gamma(0)=0$，使得对任意的 $t\in\mathbf{R}$，$\boldsymbol{E}[X_0(t)^2]\geqslant c_5$，且对所有 $s,t\in[0,\infty)$，有

$$c_6^{-1}\gamma^2(|t-s|)\leqslant\boldsymbol{E}[(X_0(t)-X_0(s))^2]\leqslant c_6\gamma^2(|t-s|);\tag{3}$$

（C2）存在常数 $\delta, c_7>0$，使得对所有 $s,t\in[0,\infty)$，当 $|t-s|\leqslant\delta$ 时，有

$$\mathrm{Var}(X_0(t)|X_0(s))\geqslant c_7\gamma^2(|t-s|)。\tag{4}$$

注 1 1）函数 $\gamma^2(|t-s|)$ 仅依赖 $|t-s|$，条件（C1）和（C2）要求 X_0 的增量是近似平稳的；2）条件（C2）称为局部不确定性；3）在式（3）条件下，过程一定存在一个连续修正，因此本文恒设 X 连续。

恒假设 γ 具有上下指数。定义 γ 在 0 处的上指数为

$$\alpha^* = \inf\{\beta\geqslant 0:\lim_{r\to 0}(\gamma(r)/r^\beta)=\infty\}。\tag{5}$$

为了方便，这里的 $\inf\boldsymbol{\phi}=\infty$。类似地，$\gamma$ 在 0 处的下指数定义为

$$\alpha_* = \sup\{\beta\geqslant 0:\lim_{r\to 0}(\gamma(r)/r^\beta)=0\}。\tag{6}$$

注 2 下面是关于函数 γ 的上下指数的注：1）由函数 γ 的上下指数的定义可知，$0 \leqslant \alpha_* \leqslant \alpha^* \leqslant \infty$；2）任意给定常数 $c_8, c_9 > 0$，对任意 $\varepsilon_0 > 0$，存在 $\delta_1 > 0$，使得对 $r \in (0,\delta_1)$，有 $c_8 r^{\alpha^*+\varepsilon_0} \leqslant \gamma(r) \leqslant c_9 r^{\alpha^*-\varepsilon_0}$；3）任意给定常数 $c_{10}, c_{11} > 0$，对任意 $\varepsilon_0 > 0$，存在 $\delta_2 > 0$，使得对 $r \in (0,\delta_2)$，有 $c_{10} r^{\alpha_*+\varepsilon_0} \leqslant \gamma(r) \leqslant c_{11} r^{\alpha_*-\varepsilon_0}$。

首先介绍一些符号用于后续定理的证明。

令 $\alpha \in (0,1)$，考虑 $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d$ 上的抛物度量 ρ_α，其定义为：对任意 $(s,x),(t,y) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d$，$\rho_\alpha((s,x),(t,y)) = \max\{|t-s|^\alpha, \|x-y\|\}$，这里的 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbf{R}^d$ 上的欧式度量。

对 $\beta > 0$，$F \subseteq \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d$ 关于抛物度量 ρ_α 的 β-维 Hausdorff 测度定义为

$$H^\beta_{\rho_\alpha}(F) = \lim_{\delta\to 0} \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} (2r_j)^\beta : F \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{\rho_\alpha}(r_j), r_j \leqslant \delta\}。\tag{7}$$

其中：$B_{\rho_\alpha}(r_j)$ 是度量空间 $(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d, \rho_\alpha)$ 上半径为 r_j 的开球。对 $F \subseteq \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d$，记 F_β 为 F 的 β 阶能量，定义为 $\varepsilon_{\rho_\alpha,\beta}(F) = \int_{\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d} f_\beta(\rho_\alpha(u,v))\mu(\mathrm{d}u)\mu(\mathrm{d}v)$，其中：$f_\beta: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ 是一个核函数，定义为

$$f_\beta(r) = \begin{cases} r^{-\beta}, \beta > 0, \\ \log(e/(r \wedge 1)), \beta = 0, \\ 1, \beta < 0。\end{cases}\tag{8}$$

集 F 在抛物度量 ρ_α 下的 β 阶容量定义为

$$C_{\rho_\alpha,\beta}(F) = [\inf_{\mu\in P(F)} \varepsilon_{\rho_\alpha,\beta}(F)]^{-1},\tag{9}$$

其中：$P(F)$ 表示 F 的概率测度的全体。

对 $\beta > 0$，$E \subseteq \mathbf{R}^d$ 的 β 维 Hausdorff 测度定义为 $H^\beta(E) = \lim_{\delta\to 0}\inf\{\sum_{j=1}^{\infty} |U_j|^\beta : \{U_j\}$ 是 E 的一个 δ-覆盖，$|U_j| \leqslant \delta\}$；H^β 的 Hausdorff 维数定义为 $\dim(E) = \inf\{\beta > 0 : H^\beta(E) = 0\}$。对所有 $E \subseteq \mathbf{R}^d$，令 $N(E,r)$ 是用直径为 r 的集合去覆盖 E 所需的最小集合个数。E 的上下 Minkowski 维数的定义分别为：$\overline{\dim}_M(E) := \overline{\lim}_{r\to 0^+}[\log N(E,r)/\log(1/r)]$；$\underline{\dim}_M(E) := \underline{\lim}_{r\to 0^+}[\log N(E,r)/\log(1/r)]$。等价地，$E$ 的上 Minkowski 维数可以写为

$$\overline{\dim}_M(E) = \inf\{k : \exists C < \infty, \text{使得 } N(E,r) \leqslant Cr^{-k}, \text{对所有 } r > 0\}。\tag{10}$$

对 $\beta > 0$，$E \subseteq \mathbf{R}^d$ 的 β 阶容量的定义为 $C_\beta(E) = [\inf_{\mu\in P(E)} \varepsilon_\beta(E)]^{-1}$，其中：$\varepsilon_\beta(E) = \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} f_\beta(\|x-y\|)\mu(\mathrm{d}x)\mu(\mathrm{d}y)$。

本文恒假定 $I := [\varepsilon_1, 1]$，其中 $\varepsilon_1 \in (0,1)$ 是固定的常数。由于后续证明中利用了抛物度量下的容量和 Haussdorff 测度，恒假定 α_*、α^* 满足 $0 < \alpha_* \leqslant \alpha^* < 1$。文献［10］提供了 $\alpha^* \leqslant 1$ 的充分条件。通过对文献［4］中引理 3.1 和引理 3.2 的讨论进行适当修改，引出引理 1 和引理 2 分别用于碰撞概率下界和上界的证明。

引理 1 令 $X = \{X(t), t \in \mathbf{R}\}$ 是由式（2）定义的一个高斯随机过程，且 X_0 满足条件（C1）和（C2），则存在有限正常数 c_{12}，使得对任意的 $\alpha_1 \in (\alpha_*, 1)$ 及所有的 $x, y \in \mathbf{R}^d$、$s, t \in \boldsymbol{I}$ 和 $n > 1$，有

$$\int_{\mathbf{R}^{2d}} \mathrm{e}^{-i(\langle\xi,x\rangle+\langle\eta,y\rangle)} \exp[-(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})(n^{-1}\boldsymbol{I}_{2d} + \mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}(s),\boldsymbol{X}(t)))(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})^{\mathrm{T}}/2]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \leqslant c_{12}\rho_{\alpha_1}((s,x),(t,y))^{-d}。\tag{11}$$

其中：$\boldsymbol{I}_{2d}$ 表示阶为 $2d$ 的单位矩阵；$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}(s),\boldsymbol{X}(t))$ 表示随机向量 $(\boldsymbol{X}(s),\boldsymbol{X}(t))$ 的协方差阵；$(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})^{\mathrm{T}}$ 为行向量 $(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 的转置。

证明 根据文献［4］中引理 3.2 的证明，得到 $\int_{\mathbf{R}^{2d}} \mathrm{e}^{-i(\langle\xi,x\rangle+\langle\eta,y\rangle)} \exp[-(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})(n^{-1}\boldsymbol{I}_{2d} + \mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}(s),$

$\boldsymbol{X}(t)))(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})^{\mathrm{T}}/2]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} \leqslant (2\pi)^{d}(\det\Gamma_n(s,t))^{-d/2}\exp[-c_{13}\|x-y\|^2/(2\det\Gamma_n(s,t))]$。其中：$\Gamma_n(s,t) = n^{-1}\boldsymbol{I}_2 + \mathrm{Cov}(X_j(s),X_j(t))$，常数 c_{13} 满足 $0 < c_{13} \leqslant \min\{c_5, c_5c_7/c_6\}$。

根据条件（C1）、（C2）和注 2，存在常数 c_{14}，使得 $\det\Gamma_n(s,t) \geqslant \det\mathrm{Cov}(X_0(s),X_0(t)) = \mathrm{Var}(X_0(s))\mathrm{Var}(X_0(t)\mid X_0(s)) \geqslant c_{14}|t-s|^{2\alpha_1}$。

记 $\boldsymbol{I}_n((s,x),(t,y)) = (2\pi)^{d}(\det\Gamma_n(s,t))^{-d/2}\exp[-c_{13}\|x-y\|^2/(2\det\Gamma_n(s,t))]$。一方面，当 $\det\Gamma_n(s,t) \geqslant \|x-y\|^2$ 时，有

$$\boldsymbol{I}_n((s,x),(t,y)) \leqslant (2\pi)^{d}(\det\Gamma_n(s,t))^{-d/2} \leqslant c_{15}|t-s|^{-\alpha_1 d}。\tag{12}$$

另一方面，当 $\det\Gamma_n(s,t) \leqslant \|x-y\|^2$ 时，利用基本不等式 $x^{d/2}\mathrm{e}^{-c_{16}x} \leqslant c_{17}$，有

$$\boldsymbol{I}_n((s,x),(t,y)) \leqslant c_{18}\|x-y\|^{-d}。\tag{13}$$

结合式（12）~式(13)，存在常数 c_{19}，使得 $\boldsymbol{I}_n((s,x),(t,y)) \leqslant c_{19}/\max\{|t-s|^{\alpha_1 d}, \|x-y\|^{d}\} = c_{19}\rho_{\alpha_1}((s,x),(t,y))^{-d}$。因此，$\int_{\mathbf{R}^{2d}}\mathrm{e}^{-i(\langle\xi,x\rangle+\langle\eta,y\rangle)}\exp[-(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})(n^{-1}\boldsymbol{I}_{2d} + \mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}(s),\boldsymbol{X}(t)))(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})^{\mathrm{T}}/2]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} \leqslant c_{19}\rho_{\alpha_1}((s,x),(t,y))^{-d}$。

注 3　由容量的定义可知，$C_{d-1/\alpha_*} \geqslant C_{d-1/\alpha^*}$，所以为了碰撞概率下界得到更好的结果，在该引理中考虑下指数，不考虑上指数。

引理 2　令 $X = \{X(t), t \in \mathbf{R}\}$ 是由式（2）定义在 $\mathbf{R}^d$ 上的高斯随机过程，且 X_0 满足条件（C1）和（C2），那么存在常数 $\delta_0 > 0$、$c_{20} > 0$ 和任意 $\alpha_2 \in (0,\alpha^*)$，使得对所有的 $M > 0$、$x \in [-M,M]^d$，且对所有的 $r \in (0,\delta_0)$、$t \in I$，有

$$P\{\inf_{s\in B(t,r)\cap \boldsymbol{I}}\|X(s)-x\| \leqslant r\} \leqslant c_{20}r^{d}。\tag{14}$$

其中：$B(t,r) = \{s \in \mathbf{R}: |t-s|^{\alpha_2} \leqslant r\}$。

注 4　由 Hausdorff 测度的定义可知，$H_{d-1/\alpha_*} \geqslant H_{d-1/\alpha^*}$，所以为了碰撞概率上界得到更好的结果，在引理 2 中考虑上指数。

2　碰撞概率的下界

定理 1　令 $X = \{X(t), t \in \mathbf{R}\}$ 是由式（2）定义的高斯随机过程，且 X_0 满足条件（C1）和（C2）。如果对任意的 $\alpha_1 \in (\alpha_*,1)$、$M > 0$，$F \subseteq [-M,M]^d$ 是 Borel 集，且 $E \subset I$，有

$$P\{X(E) \cap F \neq \boldsymbol{\phi}\} \geqslant c_{21}C_{\rho_{\alpha_1},d}(E\times F)。\tag{15}$$

其中：c_{21} 仅依赖于 $\boldsymbol{I}$、F、α_1。

证明　当 $C_{\rho_{\alpha_1},d}(E\times F) = 0$ 时，结论显然成立。设 $C_{\rho_{\alpha_1},d}(E\times F) > 0$，在 F 上存在一个 Borel 概率测度 μ，使得

$$\varepsilon_{\rho_{\alpha_1},d}(\mu) := \int_{\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d}\rho_{\alpha_1}(u,v)^{-d}\mu(\mathrm{d}u)\mu(\mathrm{d}v) \leqslant 2/C_{\rho_{\alpha_1},d}(E\times F)。\tag{16}$$

定义闭区间 $\boldsymbol{I}$ 上的随机测度序列 $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ 为 $\mu_n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = (2\pi n)^{d/2}\exp[-n\|X(t)-x\|^2/2]\mu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = \int_{\mathbf{R}^d}\exp[-\|\xi\|^2/(2n) + i\langle\xi, X(t)-x\rangle]\mathrm{d}\xi\mu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$，第二个等式可由正态分布的特征函数得到。

记 $\|\mu_n\| := \mu_n(E\times F)$ 为测度序列 $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ 的总测度，下面证明

$$E(\|\mu_n\|) \geqslant c_{22}，\ E(\|\mu_n\|^2) \leqslant c_{23}E_{\rho_{\alpha_1},d}(\mu)。\tag{17}$$

$E(\|\mu_n\|) = \int_{E\times F}\int_{\mathbf{R}^d}\mathrm{e}^{-i\langle\xi,x\rangle}\exp[-\|\xi\|^2(n^{-1}+\sigma^2(t))/2]\mathrm{d}\xi\mu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = \int_{E\times F}(2\pi/n^{-1}+\sigma^2(t))^{d/2}\exp[-\|x\|^2/(2(n^{-1}+\sigma^2(t))]\mu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) \geqslant \int_{E\times F}[2\pi/(1+\sigma^2(t))]^{d/2}\exp[-\mathrm{d}M^2/(2\sigma^2(t))]\mu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) := c_{22} > 0$，其中 $\sigma^2(t) := E(X^2(t))$，第二个等式可利用正态分布的特征函数逆变换得到。由 F 的有界

性和概率测度 μ 可知，c_{22} 独立于 μ 和 n。

由引理 1，有 $E(\|\mu_n\|^2) = \int_{E\times F}\int_{E\times F}\int_{\mathbf{R}^{2d}} \mathrm{e}^{-i(\langle\xi,x\rangle+\langle\eta,y\rangle)}\exp[-(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})(n^{-1}\boldsymbol{I}_{2d} + \mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}(s),\boldsymbol{X}(t))(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})^{\mathrm{T}})/2]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\mu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y) \leqslant \int_{E\times F}\int_{E\times F} c_{24}\rho_{\alpha_1}((s,x),(t,y))^{-d}\mu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\mu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y) = c_{24}E_{\rho_{\alpha_1},d}(\mu)$。

由式（17）和 Paley-Zygmund 不等式，测度序列 $(\nu_n)_{n\geqslant 1}$ 存在一个子序列弱收敛于有限正测度 μ，μ 支撑在集 $\{(s,x)\in E\times F{:}X(s)=x\}$ 上，且满足式（17）。因此，$P\{X(E)\cap F\neq \boldsymbol{\phi}\} \geqslant P\{\|\mu\|>0\} \geqslant E(\|\mu\|^2)/E(\|\mu\|^2) \geqslant c_{22}^2/c_{23}E_{\rho_{\alpha_1},d}(\mu) \geqslant c_{25}C_{\rho_{\alpha_1},d}(E\times F)$。

定理 2 令 $X=\{X(t),t\in\mathbf{R}\}$ 是由式（2）定义的高斯随机过程，且 X_0 满足条件（C1）和（C2）。如果对任意的 $M>0$，$F\subseteq[-M,M]^d$ 是 Borel 集，且 $E\subset I$，那么对任意的 β_1，满足 $0<\beta_1/\alpha_*<\dim(E)\leqslant\alpha_* d$，有

$$P\{X(E)\cap F\neq\boldsymbol{\phi}\} \geqslant c_{26}C_{d-\beta_1/\alpha_*}(F)。\tag{18}$$

其中：c_{26} 是正的常数且依赖于 E、F、α_*、β_1。

通过对文献［5］引理 2.6 的讨论进行适当修改，引入引理 3。

引理 3 令 $d\geqslant 1$，且 $0<\beta/\alpha_*<\alpha_* d$，$\nu$ 是 $[0,1]$ 上的 Borel 概率测度，使得对所有的 $a\in[0,1]$ 和 $\delta>0$，有

$$\nu([a,a+\delta]) \leqslant c_{27}\delta^{\beta/\alpha_*}。\tag{19}$$

其中：c_{27} 是仅依赖于 α_*、β 的正常数。那么对所有的 $r>0$，$H\in(\alpha_*,1)$，有

$$\sup_{t\in[0,1]}\int_{[0,1]} 1/\max\{r^d,|s-t|^{Hd}\}\nu(\mathrm{d}s) \leqslant c_{28}f_{d-\beta/\alpha_*}(r)。\tag{20}$$

其中：$f_{d-\beta/\alpha_*}(r)$ 是式（8）定义的核函数；c_{28} 是正常数且仅依赖于 d、α_*、β。

证明 当 $r\geqslant 1$ 时，

$$\sup_{t\in[0,1]}\int_{[0,1]} 1/\max\{r^d,|s-t|^{Hd}\}\nu(\mathrm{d}s) \leqslant r^{-d} \leqslant f_{d-\beta/\alpha_*}(r)。\tag{21}$$

当 $r\in(0,1)$ 时，假设 $0<\beta/\alpha_*<d$，根据积分区域的可加性，将式（20）中的积分分成 I_1、I_2 两部分，$I_1=\int_{|t-s|<r^{1/H}} r^{-d}\nu(\mathrm{d}s)$，$I_2=\int_{|t-s|\geqslant r^{1/H}}|t-s|^{-Hd}\nu(\mathrm{d}s)$。利用式（19）得到

$$I_1 \leqslant r^{-d}\nu([t-r^{1/H},t+r^{1/H}]) \leqslant c_{27}2^{\beta/\alpha_*}r^{-(d-\beta/(\alpha_* H))} \leqslant c_{27}2^{\beta/\alpha_*}r^{-(d-\beta/\alpha_*)} = c_{27}2^{\beta/\alpha_*}f_{d-\beta/\alpha_*}(r)。\tag{22}$$

设 $k(r):=\min\{k\geqslant 0{:}2^{-k}\leqslant r^{1/H}\}$，则 $[r^{1/H},1)\subset\bigcup_{k=1}^{k(r)}[2^{-k},2^{-k+1})$。根据式（19），有

$$\begin{aligned}I_2 &\leqslant \sum_{k=1}^{k(r)}2^{kHd}\nu(s\in[0,1]{:}2^{-k}\leqslant|t-s|<2^{-k+1}) \leqslant 2c_{27}\sum_{k=1}^{k(r)}2^{k(Hd-\beta/\alpha_*)} \leqslant \\ &2c_{27}(2^{Hd-\beta/\alpha_*}/2^{Hd-\beta/\alpha_*}-1)r^{-(d-\beta/(\alpha_* H))} \leqslant 2c_{27}(2^{d-\beta/\alpha_*}/2^{\alpha_* d-\beta/\alpha_*}-1)r^{-(d-\beta/\alpha_*)} = \\ &2c_{27}(2^{d-\beta/\alpha_*}/2^{\alpha_* d-\beta/\alpha_*}-1)f_{d-\beta/\alpha_*}(r)。\end{aligned}\tag{23}$$

因此，结合式（21）~式（23）可推出式（20）成立。

现在证明定理 2。为了证明定理 2，只需要证明存在一个正常数 c_{29}，使得

$$C_{d-\beta_1/\alpha_*}(F) \leqslant c_{29}C_{\rho\alpha_1,d}(E\times F)\tag{24}$$

成立即可。

对 $\beta_1/\alpha_*\in(0,\dim(E))$，由 Frostman 定理，存在一个支撑在区间 E 上的 Borel 概率测度 ν，使得对所有的 $a\in E$、$\delta>0$，有 $\nu([a,a+\delta])\leqslant c_{30}\delta^{\beta_1/\alpha_*}$，其中常数 c_{30} 仅依赖于 α_*、β_1。假设 $C_{d-\beta_1/\alpha_*}(F)>0$，否则结论显然成立。对所有 $\gamma\in(0,C_{d-\beta_1/\alpha_*}(F))$，存在支撑在 F 上的概率测度 m，使得 $\varepsilon_{d-\beta_1/\alpha_*}(m):=\int_F\int_F\|x-y\|^{-(d-\beta_1/\alpha_*)}m(\mathrm{d}x)m(\mathrm{d}y)\leqslant\gamma^{-1}$。因为 $\nu\otimes m$ 是 $E\times F$ 上的概率测度，由富比尼定理和引理 3 可得，$E_{\rho_{\alpha_1},d}(\nu\otimes m) = \int_{E\times F}\int_{E\times F}[1/\max\{|t-s|^{\alpha_1 d},\|x-y\|^d\}]\nu\otimes m(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\nu\otimes$

$m(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y) \leqslant c_{28}\int_F\int_F \|x-y\|^{-(d-\beta_1/\alpha_*)} m(\mathrm{d}x)m(\mathrm{d}y) \leqslant c_{28}\gamma^{-1}$。于是，$C_{\rho_{\alpha_1},d}(E\times F) \geqslant c_{28}^{-1}\gamma$。令 $\gamma \uparrow C_{d-\beta_1/\alpha_*}(F)$，式（24）成立。

3 碰撞概率的上界

定理3 令 $X=\{X(t),t\in\mathbf{R}\}$ 是由式（2）定义的高斯随机过程，且 X_0 满足条件（C1）和（C2）。如果对任意的 $\alpha_2\in(0,\alpha^*)$、$M>0$，$F\subseteq[-M,M]^d$ 是Borel集，且 $E\subset I$，则存在常数 $c_{31}>0$，使得

$$P\{X(E)\cap F\neq\boldsymbol{\phi}\} \leqslant c_{31}H_{\rho_{\alpha_2}}^d(E\times F)。\tag{25}$$

证明 类似文献［3］用简单覆盖讨论碰撞概率上界的方法。选择一个任意常数 $l>H_{\rho_{\alpha_2}}^d(E\times F)$，由 $H_{\rho_{\alpha_2}}^d(E\times F)$ 的定义，存在 $\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d$ 上的一序列球 $\{B_{\rho_{\alpha_2}}((t_j,y_j),r_j),j\geqslant 1\}$，使得 $E\times F\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}B_{\rho_{\alpha_2}}((t_j,y_j),r_j)$ 和 $\sum_{j=1}^{\infty}(2r_j)^d\leqslant l$。注意到，$\{X(E)\cap F\neq\boldsymbol{\phi}\}\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}\{X((t_j-r_j^{1/\alpha_2},t_j+r_j^{1/\alpha_2}))\cap B(y_j,r_j)\neq\boldsymbol{\phi}\}=\bigcup_{j=1}^{\infty}\{\inf_{|t_j-s|^{\alpha_2}<r_j}\|X(s)-y_j\|<r_j\}$。因此，根据引理2，有 $P\{X(E)\cap F\neq\boldsymbol{\phi}\}\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}P\{\inf_{|t_j-s|^{\alpha_2}<r_j}\|X(s)-y_j\|<r_j\}\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}(c_{32}r_j^d)\leqslant c_{33}l$。由 l 的任意性，令 $l\downarrow H_{\rho_{\alpha_2}}^d(E\times F)$，则 $P\{X(E)\cap F\neq\boldsymbol{\phi}\}\leqslant c_{31}H_{\rho_{\alpha_2}}^d(E\times F)$ 成立。

定理4 令 $X=\{X(t),t\in\mathbf{R}\}$ 是由式（2）定义的高斯随机过程，且 X_0 满足条件（C1）和（C2）。如果对任意的 $\alpha_2\in(0,\alpha^*)$、$M>0$，$F\subseteq[-M,M]^d$ 是Borel集，且 $E\subset I$，那么对任意 $0<\overline{\dim}M(E)\leqslant\alpha_2\beta_2/\alpha^*$，且 $\beta_2<\alpha^*d$，有

$$P\{X(E)\cap F\neq\boldsymbol{\phi}\}\leqslant c_{34}H_{d-\beta_2/\alpha^*}(F)。\tag{26}$$

证明 要证明式（26），只要证明存在一个正常数 c_{35}，使得 $H_{\rho_{\alpha_2}}^d(E\times F)\leqslant c_{35}H_{d-\beta_2/\alpha^*}(F)$ 成立即可。令 $\tau>H_{d-\beta_2/\alpha^*}(F)$，由Hausdorff测度的定义知，存在半径为 r_n 的开球集 $B(r_n)$，使得

$$F\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B(r_n),\quad\sum_{n=1}^{\infty}(2r_n)^{d-\beta_2/\alpha^*}\leqslant\tau。\tag{27}$$

对所有 $n\geqslant1$，令 $E_{n,j}(j=1,\cdots,N(E,2r_n^{1/\alpha_2}))$ 是可以覆盖 E 的长度为 $2r_n^{1/\alpha_2}$ 的开区间集，那么 $E_{n,j}\times B(r_n)(j=1,\cdots,N(E,2r_n^{1/\alpha_2}))$ 是在抛物度量 ρ_{α_2} 下能覆盖住 $E\times F$ 的半径为 r_n 的开球集。因此

$$E\times F\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_j E_{n,j}\times B(r_n)。\tag{28}$$

由Minkowski维数的定义，对所有 $\delta>0$，用长度为 δ 的开区间去覆盖 E 所需的区间个数 $N(E,\delta)$ 满足

$$N(E,\delta)\leqslant c_{36}\delta^{-\alpha_2\beta_2/\alpha^*}。\tag{29}$$

其中：c_{36} 是仅依赖于 E 的正有限常数。

结合式（27）~式(29)，有 $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N(E,2r_n^{1/\alpha_2})}(2r_n)^d\leqslant c_{36}2^{(1-\alpha_2)\beta_2/\alpha^*}\sum_{n=1}^{\infty}(2r_n)^{d-\beta_2/\alpha^*}\leqslant c_{36}2^{\beta_2/\alpha^*}\tau$。

令 $\tau\downarrow H_{d-\beta/\alpha^*}(F)$，则 $H_{\rho_{\alpha_2}}^d(E\times F)\leqslant c_{35}H_{d-\beta/\alpha^*}(F)$ 成立，其中 $c_{35}=c_{34}2^{\beta_2/\alpha^*}$，上界证毕。

4 例子

因为满足条件（C1）和（C2）的高斯过程很多，不仅包括分数布朗运动、布朗单和具有规则变化的增量方差函数的高斯过程（它们的上下指数相等），还包括具有平稳增量和上下指数不同的高斯过程。当实值高斯随机场 $X_0=\{X_0(t),t\in\mathbf{R}^N\}$ 具有平稳增量和连续的协方差函数时，其上下指数与函数 $\gamma(h)$ 的上下指数是一致的，这里的 $\gamma^2(h)=E[(X_0(t+h)-X_0(t))^2]$。根据文献［11］，协方

差函数 $R(s,t)$ 表示成 $R(s,t)=\int_{\mathbf{R}^N}(\mathrm{e}^{i\langle s,\lambda\rangle}-1)(\mathrm{e}^{-i\langle t,\lambda\rangle}-1)\Delta(\mathrm{d}\lambda)+\langle s,\boldsymbol{Q}t\rangle$ ，$\boldsymbol{Q}$ 是 $N\times N$ 的正定矩阵，则 $X_0(t)=\int_{\mathbf{R}^N}(\mathrm{e}^{i\langle t,\lambda\rangle}-1)W(\mathrm{d}\lambda)+\langle \boldsymbol{Y},t\rangle$ ，其中：$\boldsymbol{Y}$ 是均值为零的高斯随机向量；$W(\mathrm{d}\lambda)$ 是独立于 $\boldsymbol{Y}$ 的中心复值的高斯随机测度，且对所有的 Borel 集 $A,B\subseteq\mathbf{R}^N$ ，满足 $E(W(A)\overline{W(B)})=\Delta(A\cap B)$ 和 $W(-A)=\overline{W(A)}$ 。当 $\boldsymbol{Y}=0$ 时，有

$$\gamma^2(h)=E[(X_0(t+h)-X_0(t))^2]=2\int_{\mathbf{R}^N}(1-\cos\langle h,\lambda\rangle)\Delta(\mathrm{d}\lambda)。\tag{30}$$

例 1[10] 对任意给定常数 $0<H_1<H_2<1$ 和任意递增实数序列 $\{b_k,k\geqslant 0\}$ ，使得 $b_0=0$，$b_k\to\infty$，定义 $\mathbf{R}^N$ 上的函数 f 为 $f(\lambda)=\begin{cases}\|\lambda\|^{-(2H_1+N)},\|\lambda\|\in(b_{2k},b_{2k+1}],\\ \|\lambda\|^{-(2H_2+N)},\|\lambda\|\in(b_{2k+1},b_{2k+2}]。\end{cases}$

利用 $\Delta(\mathrm{d}\lambda)=f(\lambda)\mathrm{d}\lambda$ 作为谱测度，可推出 X_0 具有平稳增量，且 $\alpha_*=H_1$，$\alpha^*=H_2$。

高斯过程若具有例 1 所定义的谱测度，其上下指数不同，那么利用定理 2 和定理 4 的结果可得到其碰撞概率的上下界。

例 2 设 $X=\{X(t),t\in\mathbf{R}\}$ 是由式（2）定义在 $\mathbf{R}^d$ 上的高斯随机过程，且 $X_0=\{X_0(t),t\in\mathbf{R}\}$ 具有连续的协方差函数和例 1 定义的谱测度，那么对任意的 $M>0$，$\alpha_2\in(0,H_2)$，$0<\beta_1/H_1<\dim(E)\leqslant\overline{\dim}_M(E)\leqslant\alpha_2\beta_2/H_2$ ，且 $\beta_1/H_1<H_1 d$，$\beta_2<H_2 d$ ，存在常数 c_{37}、c_{38}，使得对任意的 Borel 集 $F\subset[M,M]^d$，$E\subset I$，$c_{37}C_{d-\beta_1/H_1}(F)\leqslant P\{X(E)\cap F\neq\boldsymbol{\phi}\}\leqslant c_{38}H_{d-\beta_2/H_2}(F)$ ，其中常数 c_{37} 依赖于 E、F、H_1、β_1，c_{38} 依赖于 E、F、H_2、β_2。

[参考文献]

[1] KHOSHNEVISAN D, SHI Z. Brownian sheet and capacity[J]. The Annals of Probability, 1999, 27(3): 1135-1159.
[2] DALANG R C, KHOSHNEVISAN D, NUALART E. Hitting probabilities for systems of non-linear stochastic heat equations with multiplicative noise[J]. Probability Theory and Related Fields, 2008, 144(3/4): 371-427.
[3] XIAO Y M. Sample path properties of anisotropic Gaussian random fields[C]//Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009: 145-212.
[4] BIERMÉ H, LACAUX C, XIAO Y. Hitting probabilities and the Hausdorff dimension of the inverse images of anisotropic Gaussian random fields[J]. Bulletin of the London Mathematical Society, 2009, 41(2): 253-273.
[5] HAKIKI Y, ERRAOUI M. Hitting probabilities for fractional Brownian motion with deterministic drift[EB/OL]. [2021-12-03](2022-04-01). https://arxiv.org/abs/2112.02085v1.
[6] VIENS F, ERRAOUI M, HAKIKI Y. Hausdorff dimensions and Hitting probabilities for some general Gaussian processes[EB/OL]. [2021-12-07](2022-04-01). https://arxiv.org/abs/2112.03648v1.
[7] AYACHE A, SHIEH N R, XIAO Y. Multiparameter multifractional Brownian motion: local nondeterminism and joint continuity of the local times[J]. Annales de lÏnstitut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques, 2011, 47(4): 1029-1054.
[8] NUALART E, VIENS F. Hitting probabilities for general Gaussian processes[EB/OL]. (2013-05-08)[2022-04-01]. http://arxiv.org/abs/1305.1758.
[9] CHEN Z L, XIAO Y M. On intersections of independent anisotropic Gaussian random fields[J]. Science China Mathematics, 2012, 55(11): 2217-2232.
[10] XIAO Y M. Strong local nondeterminism and the sample path properties of Gaussian random fields[C]//LAI T L, SHAO Q M, QIAN L F. Asymptotic Theory in Probability and Statistics with Applications. Beijing: Higher Education Press, 2007: 136-176.
[11] YAGLOM A M. Some classes of random fields inn-dimensional space, related to stationary random processes[J]. Theory of Probability and Its Applications, 1957, 2(3): 273-320.

（责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤）