[文章编号] 1007 - 7405(2024)06 - 0481 - 07 DOI:10.19715/j.jmuzr.2024.06.01

Caputo-Hadamard 时间分数阶反应扩散方程的 *L*1 格式差分逼近

刘欣然，陈景华，龚珊珊

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 提出一种求 Caputo-Hadamard 时间分数阶反应扩散方程的数值解法。将一阶的时间导数用 Caputo-Hadamard导数替换，再对 Caputo-Hadamard 时间分数阶导数采用 *L*1 插值逼近离散；利用中心差分公式离散空间二阶导数，构造方程的数值离散格式，并证明该数值格式具有稳定性和收敛性。之后利用 Richardson 外推法进一步提高空间精度，并给出具体算法，使方程新的差分格式达到空间方向四阶收敛。最后给出一个数值算例，证明该数值格式的有效性。

[关键词] 分数阶反应扩散方程；Caputo-Hadamard 导数；*L*1 格式；Richardson 外推法；稳定性；收敛性

[中图分类号] O 241.82

*L*1 Scheme Difference Approximation for Caputo-Hadamard Time Fractional Reaction-Diffusion Equation

LIU Xinran, CHEN Jinghua, GONG Shanshan

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: A numerical method for solving Caputo-Hadamard time fractional reaction-diffusion equation was presented in this paper. The first order time derivative was replaced by the Caputo-Hadamard derivative and then the Caputo-Hadamard time fractional derivative was approximated by *L*1 interpolation. The second derivative of space was discretized by the central difference formula, and the numerical discretization scheme of the equation was constructed. It was proved that the numerical scheme was stability and convergence. Then Richardson extrapolation was applied to further improve the spatial accuracy, and a specific algorithm was presented to make the new difference scheme reach fourth order convergence in space direction. Finally, a numerical example was implemented to test the efficiency of the numerical scheme.

Keywords: fractional reaction-diffusion equation; Caputo-Hadamard derivative; *L*1 scheme; Richardson extrapolation; stability; convergence

[收稿日期] 2023 - 02 - 28

[基金项目] 福建省自然科学基金项目“非光滑数据下分数阶微分方程的高精度数值算法及其应用研究”（2020J01338）；福建省教育厅基金项目“基于统计分析与显著性检测的图像处理”（JAT210231）；福建省高校数学学科联盟项目“非局部优化约束问题的高阶数值方法”（2024SXLMMS03）；集美大学数字福建大数据建模与智能计算研究所开放基金项目“具有吸收边界和反射边界的调和分数阶微分方程的谱延迟校正法及数值模拟”

[作者简介] 通信作者：陈景华（1977—），副教授，从事分数阶偏微分方程数值解研究。E-mail：cjhdzdz@163.com

0 引言

分数阶（空间分数阶、时间分数阶和空间-时间分数阶）反应扩散方程是经典的整数阶反应扩散方程的推广，它是将整数阶导数用分数阶导数来替换得到的微分方程。由于分数阶微分算子是拟微分算子，具有非局部性，因此分数阶微分方程比整数阶方程能更精确地拟合自然物理过程和动态系统过程[1]. 并且这类方程已在物理、生物、化学等领域得到了广泛的应用[2]。

Hadamard 分数阶导数不同于 Riemann-Liouville 和 Caputo 分数阶导数[3]，它的特殊性在于其积分的核包含一个任意指数的对数函数。研究发现，Hadamard 导数、Hadamard 型分数微分方程在实际问题中与力学、工程等息息相关[4]。Caputo-Hadamard 分数阶导数有助于描述变化缓慢的过程，尤其是微妙的难以感知的变化过程，如能够更准确地描述 Lomnitz 对数蠕变律及超慢力学等复杂过程[5]。在最近几年的研究中，Gohar[6] 研究了 Caputo-Hadamard 分数阶常/偏微分方程的基本理论和数值方法，改进了分数阶 Riccati 方程的数值方法；Ou 等[7] 研究了具有初始奇点的 Caputo-Hadamard 分数扩散波方程；Jarad 等[8] 研究了 Hadamard 分数阶导数的 Caputo 型修正及其性质；Wang 等[9] 研究了具有初始奇点的 Caputo-Hadamard 分数式子扩散方程的非均匀时间网格的二阶方案；Fan 等[10] 提出了 $L1-2$ 、$L2-1_S$ 、$H2N2$ 等 3 种近似 Caputo-Hadamard 分数阶导数的数值公式。

在此情况下，考虑 Caputo-Hadamard 时间分数阶反应扩散方程

$$ {}_{\mathrm{CH}}D_{a,t}^{\alpha}u(x,t)+\mu u(x,t)=\partial^2 u(x,t)/\partial x^2+f(x,t),x\in[0,L],t\in(a,T]。 \tag{1}$$

边界条件为

$$u(0,t)=0,u(L,t)=0,t\in(a,T]。\tag{2}$$

初始条件为

$$u(x,0)=\varphi(x),x\in[0,L]。\tag{3}$$

其中：$\mu>0$ 是常数；$\varphi(x)$、$f(x,t)$ 是充分光滑的已知函数；${}_{\mathrm{CH}}D_{a,t}^{\alpha}u(x,t)$ 是关于 Caputo-Hadamard 导数，其定义为

$$ {}_{\mathrm{CH}}D_{a,t}^{\alpha}u(x,t)=\begin{cases}(1/\Gamma(1-\alpha))\int_a^t(\log t/s)^{-\alpha}\delta u(x,s)\cdot(\mathrm{d}s/s),0<\alpha<1,\\ \partial u(x,t)/\partial t,\alpha=1。\end{cases}\tag{4}$$

其中：Γ 为 gamma 函数；$\delta=x\cdot(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)$ 是 δ 一导数.

本文研究的方程是在文献［11］研究的方程中加入扩散项，且当 $\mu=0$ 时，方程（1）~（3）与文献［11］研究的方程一致。因此，本文在时间上利用 $L1$ 插值对 Caputo-Hadamard 分数阶导数进行离散，空间上利用中心差分公式进行离散，分析了其格式的稳定性与收敛性；利用 Richardson 外推法将空间精度提高到了四阶；最后利用数值算例严格验证了格式的有效性。

1 离散格式的建立

首先对空间和时间进行离散。取正整数 M、N，将区间 $[0,L]$ 均匀划分为 M 个子区间。记 $\omega_h=\{x_i|0\leqslant i\leqslant M\}$，使得 $0=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_M=L$ 。空间步长 $h=L/M$，再将区间 $[a,T]$ 均匀划分为 N 个子区间。记 $\omega_t=\{t_k|0\leqslant k\leqslant T\}$，使得 $a=t_0<t_1<\cdots<t_{k-1}<t_k<\cdots<t_N=T$，则时间步长为 $t=(T-a)/N$ 。假设 $u=\{u_i^k|0\leqslant i\leqslant M,0\leqslant k\leqslant N\}$ 是定义在 $w_h\times w_i$ 上的网格函数。引入记号 $d_x^2u_i^k=(u_{i+1}^k-2u_i^k+u_{i-1}^k)/h^2$，$d_xu_{i-1/2}^k=(u_i^k-u_{i-1}^k)/h$ 。在点 (x_i,t_k) 处对方程（1）建立离散格式。为了方便起见，记 $U_i^k=u(x_i,t_k)$ 为方程（1）的精确解，记 $f_i^k=f(x_i,t_k)$，由文献［12］可知

$$ {}_{\mathrm{CH}}D_{a,t}^{\alpha}u(x,t)\big|_{x_i}^{t_k}=\sum_{j=1}^{k}[a_{j,k}(U_i^j-U_i^{j-1})]+O(t^{2-\alpha})=\sum_{j=0}^{k}(b_{k-j,k}U_i^j)+O(t^{2-\alpha}),\tag{5}$$

$$a_{j,k}=(1/\Gamma(2-\alpha))(1/\log(t_j/t_{j-1}))[(\log(t_k/t_{j-1}))^{1-\alpha}-(\log(t_k/t_j))^{1-\alpha}],\tag{6}$$

$$b_{j,k}=\begin{cases}-a_{1,k}, j=0,\\ a_{j,k}-a_{j+1,k}, j=1,2,\cdots,k-1,\\ a_{k,k}, j=k。\end{cases}\tag{7}$$

用中心差商离散 $\partial^2 u(x,t)/\partial x^2$，即

$$(\partial^2 u(x,t)/\partial x^2)|_{x_i}^{t_k}=(U_{i+1}^k-2U_i^k+U_{i-1}^k)/h^2+O(h^2)=\partial_x^2 U_i^k+O(h^2)。\tag{8}$$

由式（5）和式（8）可得，方程（1）等价于

$$\begin{cases}\sum_{j=0}^{k}(b_{k-j,k}U_i^j)+\mu U_i^k=d_x^2U_i^k+f_i^k+R_i^k,\\ U_i^0=\varphi(x_i),0\leqslant i\leqslant M,\\ U_0^k=U_M^k=0,1\leqslant k\leqslant N。\end{cases}\tag{9}$$

其中：R_i^k 是局部截断误差；$b_{j,k}$定义由式（6）~（7）给出。从而可对方程（1）建立差分格式

$$\begin{cases}\sum_{j=0}^{k}(b_{k-j,k}u_i^j)+\mu u_i^k=d_x^2u_i^k+f_i^k,\\ u_i^0=\varphi(x_i),0\leqslant i\leqslant M,\\ u_0^k=u_M^k=0,1\leqslant k\leqslant N。\end{cases}\tag{10}$$

其中：$b_{j,k}$定义由式(6)~(7)给出。

2　稳定性和收敛性分析

2.1　半离散格式的稳定性和收敛性分析

对于方程在第 $t_k(1\leqslant k\leqslant N)$ 时间层，有

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{k}\{a_{j,k}[u(x,t_j)-u(x,t_{j-1})]\}+\mu u(x,t_j)=\Delta u(x,t_j)+f(x,t_j)+R^k(x),\\ u^0(x)=\varphi(x),0<x<L,\\ u^k(0)=u^k(L)=0,1\leqslant k\leqslant N。\end{cases}\tag{11}$$

其中：$\Delta u(x,t_j)=\partial^2u(x,t)/\partial x^2$；$R^k(x)$ 为时间上的局部截断误差。设 $u^k(x)\approx u(x,t_k)$ 是 $1\leqslant k\leqslant N$ 上的数值逼近，略去截断误差，则有差分格式

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{k}\{a_{j,k}[u^j(x)-u^{j-1}(x)]\}+\mu u^k(x)=\Delta u^k(x)+hf^k(x),\\ u^0(x)=\varphi(x),0<x<L,\\ u^k(0)=u^k(L)=0,1\leqslant k\leqslant N。\end{cases}\tag{12}$$

其中：$f^k(x)=f(x,t_k)$。

引理1[12]　当$0<\alpha<1$时，式（6）中的系数$a_{j,k}(1\leqslant j\leqslant k,1\leqslant k\leqslant N)$满足$a_{k,k}>a_{k-1,k}>\cdots>a_{j,k}>a_{j-1,k}>\cdots>a_{1,k}>0$。

引理2[12]　如果$0<\alpha<1$且$u(\cdot,t)\in C^2[a,T]$，则式（11）中的局部截断误差R^k（$1\leqslant k\leqslant N$）有估计式 $|R^k|\leqslant[(1/\Gamma(1-\alpha))(\log(t_k/t_{k-1}))^2+(1/\Gamma(1-\alpha))\max\limits_{1\leqslant n\leqslant N}(\log(t_n/t_{n-1}))^2]\times(\log(t_k/t_{k-1}))^{-\alpha}\max\limits_{a\leqslant t\leqslant t_k}|d^2u(x,t)|$。

推论1[12]　在均匀网格下，式（11）中的局部截断误差为 $|R^k|\leqslant Ct^{2-\alpha}$。其中$C$是任意与$t$无关的正常数。

记L^2内积、L^2范数、H^1半范数和H^1范数分别为 $(v,w)=\int_0^1 vw\mathrm{d}x$、$\|v\|=\sqrt{(v,v)}$、$|v|_1=$

$\|\nabla v\| = \sqrt{(\nabla v, \nabla v)}$、$\|v\|_1 = \sqrt{(\|v\|^2 + |v|_1^2)}$。下面的定理 1 给出了半离散的差分格式（12）在给定初值 $\varphi(x)$ 和右端项 f 时的稳定性。

定理 1（稳定性）　设 $u^k(x)$ 为差分格式（12）的解，则有 $\|\nabla u^k\|^2 \leqslant \|\nabla\varphi\|^2 + (\Gamma(1-\alpha)/2)(\log(T/a))^\alpha \max\limits_{1\leqslant n\leqslant N}\|f^n\|^2, 1 \leqslant k \leqslant N$。

证明　将式（12）中的第一式改写得到，$(a_{k,k}+\mu)u^k(x) - \Delta u^k(x) = \sum\limits_{j=1}^{k-1}[(a_{j+1,k}-a_{j,k})u^j(x)] + a_{1,k}u^0(x) + f^k(x), 1 \leqslant k \leqslant N$。将其两边同时与 $-2\Delta u^k(x)$ 做内积可得，$(a_{k,k}+\mu)(u^k, -2\Delta u^k) - (\Delta u^k, -2\Delta u^k) = \sum\limits_{j=1}^{k-1}[(a_{j+1,k}-a_{j,k})(u^j, -2\Delta u^k)] + a_{1,k}(u^0, -2\Delta u^k) + (f^k, -2\Delta u^k)$。由引理 1 和柯西不等式可知，$(2a_{k,k}+2\mu)\|\nabla u^k\|^2 + 2\|\Delta u^k\|^2 = 2\sum\limits_{j=1}^{k-1}[(a_{j+1,k}-a_{j,k})(\nabla u^j, \nabla u^k)] + 2a_{1,k}(\nabla u^0, \nabla u^k) - 2(f^k, \nabla u^k) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{k-1}[(a_{j+1,k}-a_{j,k})(\|\nabla u^j\|^2 + \|\nabla u^k\|^2)] + a_{1,k}(\|\nabla u^0\|^2 + \|\nabla u^k\|^2) + \|f^k\|^2/2 + 2\|\Delta u^k\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{k-1}[(a_{j+1,k}-a_{j,k})\|\nabla u^j\|^2] + a_{k,k}\|\nabla u^k\|^2 + a_{1,k}\|\nabla u^0\|^2 + \|f^k\|^2/2 + 2\|\Delta u^k\|^2$。因而，$(a_{k,k}+2\mu)\|\nabla u^k\|^2 \leqslant \sum\limits_{j=1}^{k-1}[(a_{j+1,k}-a_{j,k})\|\nabla u^j\|^2] + a_{1,k}\|\nabla u^0\|^2 + \|f^k\|^2/2, 1 \leqslant k \leqslant N$。注意到 $a_{1,k} = (1/\Gamma(1-\alpha))x_1^{-\alpha} \geqslant (1/\Gamma(1-\alpha))(\log(t_k/a))^{-\alpha} \geqslant (1/\Gamma(1-\alpha))(\log(T/a))^{-\alpha}$，$1/a_{1,k} \leqslant \Gamma(1-\alpha)(\log(T/a))^\alpha$，其中：$\log(t_k/t_1) < x_1 < \log(t_k/a)$，则有

$$(a_{k,k}+2\mu)\|\nabla u^k\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{k-1}[(a_{j+1,k}-a_{j,k})\|\nabla u^j\|^2] + a_{1,k}(\|\nabla u^0\|^2 + (h^2\Gamma(1-\alpha)/2)(\log(T/a))^\alpha\|f^k\|^2), 1 \leqslant k \leqslant N。\tag{13}$$

令 $I = \|\nabla\varphi\|^2 + (\Gamma(1-\alpha)/2)(\log(T/a))^\alpha \max\limits_{1\leqslant n\leqslant N}\|f^n\|^2$，则式（13）可改写为 $(a_{k,k}+2\mu)\|\nabla u^k\|^2 \leqslant \sum\limits_{j=1}^{k-1}[(a_{j+1,k}-a_{j,k})\|\nabla u^j\|^2] + a_{1,k}I, 1 \leqslant k \leqslant N$。下证 $\|\nabla u^k\|^2 \leqslant I, 1 \leqslant k \leqslant N$。

当 $k=1$ 时，显然 $\|\nabla u^1\|^2 \leqslant ((a_{1,k}/a_{1,k})+2\mu)I \leqslant I$。假设当 $k=1,2,\cdots,m-1$ 时，都有 $\|\nabla u^k\|^2 \leqslant I$，则当 $k=m$ 时，有 $a_{m,m}\|\nabla u^m\| \leqslant (a_{m,m}+2\mu)\|\nabla u^m\|^2 \leqslant \sum\limits_{j=1}^{m-1}[(a_{j+1,m}-a_{j,m})\|\nabla u^j\|^2] + a_{1,m}I \leqslant \sum\limits_{j=1}^{m-1}[(a_{j+1,m}-a_{j,m})I] + a_{1,m}I = a_{m,m}I$，即 $\|\nabla u^m\|^2 \leqslant I$。定理 1 证毕。

记 $e^k(x) = u(x,t_k) - u^k(x), 1 \leqslant k \leqslant N$。根据式（11）和式（12），可以推导出误差方程为

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{k}\{a_{j,k}[e^j(x)-e^{j-1}(x)]\} - \Delta e^k(x) + \mu e^k(x) = R^k(x),\\ e^0(x) = 0, 0 < x < L,\\ e^k(0) = e^k(L) = 0, 1 \leqslant k \leqslant N。\end{cases}\tag{14}$$

应用定理 1 可得

$$\|\nabla e^k\|^2 \leqslant (\Gamma(1-\alpha)/2)(\log(T/a))^\alpha \max_{1\leqslant n\leqslant N}\|R^n\|^2, 1 \leqslant k \leqslant N。\tag{15}$$

利用 Poincaré 不等式、式（15）及引理 2，得到适用于 $\partial^2 u/\partial t^2 \in C[a,T]$ 情况下的定理 2。

定理 2　设 $u(x,t)$ 在 $[a,T]$ 上关于 t 连续、二阶可微，且是初边值问题（1）~（3）的解，$u^k(x)(1 \leqslant k \leqslant N)$ 是半离散差分格式（12）的解，则有

$$\|u(\cdot,t_k) - u^k(\cdot)\|_1 \leqslant C\sqrt{(h\Gamma(1-\alpha)/2)(\log(T/a))^\alpha t^{2-\alpha}}, 1 \leqslant k \leqslant N。\tag{16}$$

其中：C 是任意与 t、h 无关的正常数。

2.2　全离散格式的稳定性和收敛性分析

设 $V_h = \{v \mid v = (v_0, v_1, \cdots, v_M), v_0 = v_M = 0\}$。对于任意 $v \in V_h$，定义 $(v,w)_h = h\sum_{i=1}^{M-1}(v_i w_i)$，$\|v\|_h = \sqrt{(v,v)_h}$，$\|d_x v\|_h = \sqrt{h\sum_{i=1}^{M}(d_x v_{i-1/2})^2}$。

引理 3[13]　对于任意 $v, w \in V_h$，有 $(v, d_x^2 w)_h = -(d_x v, d_x w)_h$。

引理 4[14]　对于任意 $v \in V_h$，有 $\|v\|_h \leqslant (1/\sqrt{6})\|d_x v\|_h$。

定理 3（稳定性）　设 $u_i^k (1 \leqslant i \leqslant M-1, 1 \leqslant k \leqslant N)$ 为方程（10）的解，则有 $\|d_x u^k\|_h^2 \leqslant \|d_x \varphi\|_h^2 + (\Gamma(1-\alpha)/2)(\log(T/a))^{\alpha}\max_{1\leqslant n\leqslant N}\|f^n\|_h^2$，$1 \leqslant k \leqslant N$。

证明　将式（10）改写为 $(a_{k,k}+\mu)u_i^k - d_x^2 u_i^k = \sum_{j=1}^{k-1}[(a_{j+1,k}-a_{j,k})u_i^j] + a_{1,k}u^0(x) + hf_i^k$，$1 \leqslant k \leqslant N$。将其两边同时与 $-2hd_x^2 u_i^k$ 做内积，将 $i(i = 1,2,\cdots,M-1)$ 项求和，可得 $-2h(a_{k,k}+\mu)\sum_{i=1}^{M-1}(u_i^k \cdot d_x^2 u_i^k) + 2h\sum_{i=1}^{M-1}(d_x^2 u_i^k \cdot d_x^2 u_i^k) = -2\sum_{j=1}^{k-1}(a_{j+1,k}-a_{j,k})h\sum_{i=1}^{M-1}(u_i^j \cdot d_x^2 u_i^k) - 2a_{1,k}h\sum_{i=1}^{M-1}(u_i^0 \cdot d_x^2 u_i^k) - 2h\sum_{i=1}^{M-1}(f_i^k \cdot d_x^2 u_i^k)$，则有 $-2(a_{k,k}+\mu)(u^k, d_x^2 u^k)_h + 2(d_x^2 u^k, d_x^2 u^k)_h = -2\sum_{j=1}^{k-1}[(a_{j+1,k}-a_{j,k})(u^j, d_x^2 u^k)_h] - 2a_{1,k}(u^0, d_x^2 u^k)_h - 2(f^k, d_x^2 u^k)_h$。应用引理 3 可得，$2(a_{k,k}+\mu)(d_x u^k, d_x u^k)_h + 2(d_x^2 u^k, d_x^2 u^k)_h = 2\sum_{j=1}^{k-1}[(a_{j+1,k}-a_{j,k})(d_x u^j, d_x u^k)_h] + 2a_{1,k}(d_x u^0, d_x u^k)_h - 2(f^k, d_x^2 u^k)_h$。

由引理 1 和柯西不等式可知，$2(a_{k,k}+\mu)\|d_x u^k\|_h^2 + 2\|d_x u^k\|_h^2 \leqslant \sum_{j=1}^{k-1}[(a_{j+1,k}-a_{j,k})(\|d_x u^k\|_h^2 + \|d_x u^k\|_h^2)] + a_{1,k}(\|d_x u^0\|_h^2 + \|d_x u^k\|_h^2) + (1/2)\|f^k\|_h^2 + 2\|d_h^2 u^k\|_h^2$。因而，$(a_{k,k}+2\mu)\|d_x u^k\|_h^2 \leqslant \sum_{j=1}^{k-1}[(a_{j+1,k}-a_{j,k})\|d_x u^j\|_h^2] + a_{1,k}\|d_x u^0\|_h^2 + \|f^k\|_h^2/2$，$1 \leqslant k \leqslant N$。由半离散格式中相同的证明方法易得，$\|d_x u^k\|_h^2 \leqslant \|d_x u^0\|_h^2 + (\Gamma(1-\alpha)/2)(\log(T/a))^{\alpha}\max_{1\leqslant n\leqslant N}\|f^n\|_h^2$，$1 \leqslant k \leqslant N$。定理 3 得证。

对全离散格式（10）进行误差估计。设 $e_i^k = u(x_i, t_k) - u_i^k$，$0 \leqslant i \leqslant M$，$1 \leqslant k \leqslant N$，则误差方程为

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{k}[a_{j,k}(e_i^j - e_i^{j-1})] - d_x^2 e_i^k + \mu e_i^k = R_i^k, \\ e_i^0 = 0, 0 < i < M, \\ e_0^k = e_M^k = 0, 1 \leqslant k \leqslant N。\end{cases} \tag{17}$$

由定理 2 可知，

$$\|d_x e^k\|_h^2 \leqslant (h\Gamma(1-\alpha)/2)(\log(T/a))^{\alpha}\max_{1\leqslant n\leqslant N}\|R_i^k\|_h^2, 1 \leqslant k \leqslant N。\tag{18}$$

根据定理 3 和引理 4，得到下列适用于 $u(x,t) \in C_{x,t}^{4,2}([0,L]\times[a,T])$ 情况下的定理 4。

定理 4　设 $u(x,t)$ 在 $[a,T]$ 上关于 t 连续、二阶可微，且是初边值问题（1）~（3）的解，$u_i^k (0 \leqslant i \leqslant M, 1 \leqslant k \leqslant N)$ 是全离散差分格式（10）的解，则有

$$\|e^k\|_h + \|d_x e^k\|_h \leqslant C_1\sqrt{(\Gamma(1-\alpha)/2)(\log(T/a))^{\alpha}}(t^{2-\alpha} + h^2), 1 \leqslant k \leqslant N。\tag{19}$$

其中：C_1 是任意与 t、h 无关的正常数。

3　Richardson 外推法

本节利用 Richardson 外推法改进空间上的收敛阶。固定时间步长为 t，对空间步长分别采用 h 和

$2h$，则可以通过计算 $(\tilde{u}_i^k) = (4(u_{2i}^k)^h - (u_i^k)^{2h})/3(k=1,2,\cdots,N-1)$ 得到外推解，其中：在粗网格上，$x=x_i$；在细网格上，$x=x_{2i}$；$(u_i^k)^{2h}$ 和 $(u_{2i}^k)^h$ 分别是粗网格和细网格上的数值解，则有

$$\|e^k\|_h + \|d_x e^k\|_h \leqslant C_2\sqrt{(\Gamma(1-\alpha)/2)(\log(T/a))^{\alpha}}(t^{2-\alpha}+h^4), 1 \leqslant k \leqslant N。\tag{20}$$

其中：C_2 是任意与 t、h 无关的正常数。

4　数值例子

例 1　考虑 Caputo-Hadamard 分数阶反应扩散方程

$$\begin{cases} {}_{\mathrm{CH}}D_{a,t}^{\alpha}u(x,t) + u(x,t) = \partial^2 u(x,t)/\partial x^2 + f(x,t), 1 < t \leqslant T, 0 < x < 1, \\ u(x,1) = 0, 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, 1 < t \leqslant 2。\end{cases}\tag{21}$$

其中：$\alpha \in (0,1)$。这里右端源项为 $f(x,t) = x^p(1-x)^q(\log t)^{r-\alpha}(\Gamma(r+1)/\Gamma(r+1-\alpha)) + x^p(1-x)^q(\log t)^r - (p(p-1)x^{p-2}(1-x)^q - 2pqx^{p-1}(1-x)^{q-1} + q(q-1)x^p(1-x)^{q-2})(\log t)^r$。该方程的精确解为 $u(x,t) = x^p(1-x)^q(\log t)^r$。其中：参数 p、q、r 为正数。

定义误差范数为 $E(t,h) = \max\limits_{\substack{0\leqslant k\leqslant N\\0\leqslant i\leqslant M}}|u(x_i,t_k) - u_i^k|$，其中：$u(x_i,t_k)$ 和 u_i^k 分别表示该问题在点 (x_i,t_k) 处的精确解和数值解；t 表示时间步长；h 表示空间步长。

定义时间方向的收敛阶 rate_t 和空间方向的收敛阶 rate_h 分别为 $\mathrm{rate}_t = \ln(E(t,h)/E(t/2,h))$、$\mathrm{rate}_h = \ln(E(t,h)/E(t,h/2))$。

表 1 是 $h = 1/1\,000$、$r=3$、$p=q=1$、$\alpha = 0.3, 0.6, 0.9$ 的精确解和数值解的最大误差及时间方向上的收敛阶。可见，t 的收敛阶接近 $2-\alpha$，这与本文中的理论分析结果是一致的。

表 1　最大误差和 t 的收敛阶（$h=1/1\,000$，$r=2$，$p=q=1$，$\alpha=0.3, 0.6, 0.9$）

Tab. 1　The maximum errors and the convergence orders for t ($h=1/1\,000, r=2, p=q=1, \alpha=0.3, 0.6, 0.9$)

t	$\alpha=0.3$		$\alpha=0.6$		$\alpha=0.9$	
	$E(t,h)$	rate_t	$E(t,h)$	rate_t	$E(t,h)$	rate_t
1/40	$3.823\,0\times10^{-6}$	—	$2.714\,9\times10^{-5}$	—	$1.657\,1\times10^{-4}$	—
1/80	$1.182\,9\times10^{-6}$	1.692	$1.022\,5\times10^{-5}$	1.409	$7.699\,3\times10^{-5}$	1.106
1/160	$3.656\,9\times10^{-7}$	1.694	$3.859\,7\times10^{-6}$	1.406	$3.584\,1\times10^{-5}$	1.103
1/320	$1.129\,7\times10^{-7}$	1.694	$1.458\,9\times10^{-6}$	1.404	$1.670\,1\times10^{-5}$	1.102
1/640	$3.487\,6\times10^{-8}$	1.696	$5.519\,2\times10^{-7}$	1.402	$7.786\,8\times10^{-6}$	1.100

表 2 是 $h=1/1\,000$、$r=3$、$\alpha=0.7$ 和 $(p,q) = (2,1),(1,2),(3/2,1),(1,7/2)$ 的精确解和数值解的最大误差及时间方向上的收敛阶。可见，当 $(p,q)=(2,1),(1,2)$ 时，由于精确解 $u(x,t) \in C_{x,t}^{4,2}([0,1]\times[1,2])$，则 t 的收敛阶接近 $2-\alpha$。当 $(p,q)=(3/2,1),(1,7/2)$ 时，精确解 $u(x,t) \in C_{x,t}^{4,2}([0,1]\times[1,2])$，此时 t 的收敛阶无法达到 $2-\alpha$，这与本文中的定理 4 的结论是一致的。

表 2　最大误差和 t 的收敛阶（$h=1/1\,000$，$r=3$，$\alpha=0.7$，$(p,q)=(2,1),(1,2),(3/2,1),(1,7/2)$）

Tab. 2　The maximum errors and the convergence orders for t

($h=1/1\,000, r=3, \alpha=0.7, (p,q)=(2,1),(1,2),(3/2,1),(1,7/2)$)

t	$(p,q)=(2,1)$		$(p,q)=(1,2)$		$(p,q)=(3/2,1)$		$(p,q)=(1,7/2)$	
	$E(t,h)$	rate_t	$E(t,h)$	rate_t	$E(t,h)$	rate_t	$E(t,h)$	rate_t
1/40	$4.703\,6\times10^{-5}$	—	$4.703\,6\times10^{-5}$	—	$6.483\,2\times10^{-5}$	—	$2.177\,7\times10^{-5}$	—
1/80	$1.915\,0\times10^{-5}$	1.296	$1.915\,0\times10^{-5}$	1.296	$2.666\,1\times10^{-5}$	1.282	$8.823\,2\times10^{-6}$	1.303
1/160	$7.788\,7\times10^{-6}$	1.298	$7.788\,7\times10^{-6}$	1.297	$1.111\,2\times10^{-5}$	1.263	$3.545\,7\times10^{-6}$	1.315
1/320	$3.165\,9\times10^{-6}$	1.299	$3.165\,9\times10^{-6}$	1.299	$4.795\,7\times10^{-6}$	1.212	$1.398\,6\times10^{-6}$	1.342
1/640	$1.286\,4\times10^{-6}$	1.299	$1.286\,4\times10^{-6}$	1.299	$2.256\,4\times10^{-6}$	1.088	$5.257\,0\times10^{-7}$	1.411

表 3 是当空间、时间步长递减时最大误差及空间方向上收敛阶的情况，这里取 $r=2$、$p=q=1$、$h^2 = t^{2-\alpha}$、$\alpha=0.5$。可见，结果与上述关于空间是二阶精度的结论是一致的。

表4是用 Richardson 外推法且当空间、时间步长递减时最大误差及空间方向上收敛阶的情况，这里取 $r = 2$、$p = q = 1$、$h^2 = t^{2-\alpha}$、$\alpha = 0.5$ 。比较表2和表3可见，表3中的误差明显小于表2的，空间上的收敛阶接近四阶。由此可见。Richardson 外推法可以改进该方程在空间的收敛阶。

表3　最大误差和 h 的收敛阶
（$r=2$，$p=q=1$，$h^2=t^{2-\alpha}$，$\alpha=0.5$）
Tab. 3　The maximum errors and the convergence orders for h（$r=2, p=q=1, h^2=t^{2-\alpha}, \alpha=0.5$）

h	$E(t,h)$	rate_h
1/8	$7.054\,2\times10^{-5}$	—
1/16	1.5876×10^{-5}	2.152
1/32	$3.923\,4\times10^{-6}$	2.017
1/64	$9.737\,3\times10^{-7}$	2.011
1/128	$2.414\,5\times10^{-7}$	2.011

表4　最大误差和 h 的收敛阶（Richardson 外推法）
（$r=2$，$p=q=1$，$h^2=t^{2-\alpha}$，$\alpha=0.5$）
Tab. 4　The maximum errors and the convergence orders for h（$r=2, p=q=1, h^2=t^{2-\alpha}, \alpha=0.5$）（Richardson extrapolation）

h	$E(t,h)$	rate_h
1/8	$2.499\,6\times10^{-3}$	—
1/16	$1.625\,1\times10^{-5}$	3.943
1/32	$1.050\,5\times10^{-6}$	3.951
1/64	$6.582\,8\times10^{-8}$	3.996
1/128	$4.117\,2\times10^{-9}$	3.999

5　结论

本文发展了一个 Caputo-Hadamard 时间分数阶反应扩散方程的数值方法，时间上利用 $L1$ 格式，空间上利用二阶中心差分，对得到的微分方程进行数值求解，证明差分格式是稳定的和无条件收敛的。此外，采用 Richardson 外推法，使得最终的差分格式收敛阶为 $O(t^{2-\alpha} + h^4)$ 。最后给出了数值例子，证明了本文的数值方法与理论结果是一致的。

［参考文献］

[1] PODLUBNY I. Fractional differential equations[M]. New York: Academic Press, 1999.

[2] PODLUBNY I. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation[J]. Fractional Calculus & Applied Analysis, 2002, 5(4): 367-386.

[3] MA L, LI C P. On Hadamard fractional calculus[J]. Fractals, 2017, 25(3): 17500335.

[4] AHMAD B, ALSAEDI A, NTOUYAS S K, et al. Hadamard-type fractional differential equations, inclusions and inequalities[M]. Cham: Springer, 2017.

[5] GARRA R, MAINARDI F, SPADA G. A generalization of the Lomnitz logarithmic creep law via Hadamard fractional calculus[J]. Chaos Solitons Fractals, 2017, 102: 333-338.

[6] GOHAR M. Caputo-Hadamard 分数阶微分方程的分析和计算[D]. 上海: 上海大学, 2020.

[7] OU C X, CEN D K, VONG S W, et al. Mathematical analysis and numerical methods for Caputo-Hadamard fractional diffusion-wave equations[J]. Applied Numerical Mathematics, 2022, 177: 34-57.

[8] JARAD F, ABDELJAWAD T, BALEANU D. Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives[J]. Advances in Difference Equations, 2012, 142: 1-8.

[9] WANG Z B, OU C X, VONG S W. A second-order scheme with nonuniform time grids for Caputo-Hadamard fractional subdiffusion equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2022, 414: 114448.

[10] FAN E Y, LI C P, LI Z Q. Numerical approaches to Caputo-Hadamard fractional derivatives with applications to long-term integration of fractional differential systems[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2022, 106: 106096.

[11] GOHAR M, LI C P, LI Z Q. Finite difference methods for Caputo-Hadamard fractional differential equations[J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2020, 17: 194.

[12] WU G C, SONG T T, WANG S Q. Caputo-Hadamard fractional differential equations on time scales: numerical scheme, asymptotic stability, and chaos[J]. Chaos (Woodbury, N. Y.), 2022, 32(9): 093143.

[13] ZHANG Y N, SUN Z Z, LIAO H L. Finite difference methods for the time fractional diffusion equation on non-uniform meshes[J]. Journal of Computational Physics, 2014, 265: 195-210.

[14] MA L, LI C P. On finite part integrals and Hadamard-type fractional derivatives[J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2018, 13: 090905.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）