

采样控制下复杂动态网络的广义函数同步

陈奕晖, 宾红华

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 针对一类非线性复杂动态网络, 研究其在采样数据控制下实现广义函数同步的问题。通过设计该网络控制响应系统及外部函数, 构造 Lyapunov 函数并将其形式转化为具有时变动态的线性函数, 得到该广义函数同步的新依据。此外, 给出一个例子, 并通过数值模拟验证理论结果的正确性。

[关键词] 采样控制; 广义函数同步; 稳定性; 复杂网络

[中图分类号] O 193

Generalized Function Synchronization of Complex Dynamic Networks Under Sampling Control

CHEN Yihui, BIN Honghua

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: For a class of nonlinear complex dynamic networks, the synchronization of generalized functions under sampling data control was studied in this paper. By designing its control response system and external functions, Lyapunov functions were constructed and transformed into linear functions with time-varying dynamics, from which a new basis for the synchronization of generalized functions was obtained. In addition, an example was given to verify the theoretical results by numerical simulation.

Keywords: sampling control; generalized function synchronization; stability; complex networks

0 引言

近年来, 对复杂网络的研究已渗入到很多科学领域, 如物理学、生物医学、工程和社会学等^[1-3]。复杂网络的本质就是其复杂性, 包括网络的拓扑结构、动力学演化、节点多样性等。在众多网络动态行为中, 同步性是一种典型的集体行为, 这引起了许多学者的关注。早期的研究大都集中在单个网络内节点间的同步, 即内部同步^[4]。随着研究的逐步深入, 学者们开始关注 2 个或多个复杂网络间的外部同步^[5], 这在现实世界中随处可见, 如捕食者-猎物相互作用网络、捕食者网络和猎物网络之间的关系等, 因此, 研究其同步性不仅可以解释大量的自然现象, 而且具有潜在利用价值。目前, 已经提出了多种关于 2 个复杂网络同步的控制方法, 包括自适应同步^[6-7]、牵制控制^[1-2]和脉冲控制^[8-10]等。在过去几年里, 有人提出了各种不同的同步定义, 如相位同步^[4]、滞后同步^[7,10-11]、投影同步^[10-18]、函数投影同步^[14-16]和广义函数同步^[17-19]等。在这些定义中, 广义函数同步是最普遍的, 近年来受到了更多的关注。Wu 等^[17]通过非线性控制器研究了 2 个完全不同的复杂动态网络之间的广义同步。研究者通过设计非线性控制器来消除网络模型的许多非线性项^[18-19], 与此同时, 越来越多的人开始关注采样数

[收稿日期] 2022-09-26

[基金项目] 国家自然科学基金项目“空间异质环境中的种群动力学斑块模型研究”(12171117)

[作者简介] 通信作者: 宾红华 (1966—), 教授, 博士, 从事网络分析与控制研究。E-mail: hhhbin@jmu.edu.cn

http://xuebaobangong.jmu.edu.cn/zkb

据系统的分析和控制^[20-22]。受到以上文献启发, 考虑非线性复杂网络在采样控制下实现广义函数同步的问题值得进一步的研究。因此, 本文针对一类复杂网络系统, 通过设计合适的采样数据控制器, 并基于广义同步和稳定性理论构造其外部函数, 将 Lapunov 函数的形式转化为具有时变动态的线性函数, 最终得到该类型复杂网络实现广义函数同步的新判据, 最后用数值模拟证实了理论分析的有效性。

1 采样控制下的复杂动态网络广义函数同步系统

考虑一个由 N 个不同的动力节点组成的复杂网络, 其中每个节点都是 n 维非自治动态系统。该复杂动态网络的状态方程可表示为

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N (c_{ij}Ax_j(t)) + \alpha(t)x(t), i = 1, 2, \cdots, N. \tag{1}$$

其中: $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in})^T \in \mathbf{R}^n$ 为每一个节点 i 的状态向量; $f_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 为连续的非线性向量值函数; 矩阵 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为每个节点的内部耦合矩阵; $\alpha(t) > 0$ 为待定的连续有界函数。矩阵 $C = (c_{ij}) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 是耦合矩阵, 如果节点 i 与节点 j 之间有连接 ($i \neq j$), 则 $c_{ij} \neq 0$, 否则 $c_{ij} = 0$, 且矩阵 C 的对角元素 c_{ii} 被定义为 $c_{ii} = -\sum_{i=1}^N c_{ij}, i = 1, 2, \cdots, N$ 。

假设1 存在一个正数 L , 使得 $\|f_i(x) - f_i(z)\| \leq L\|x - z\|, i = 1, 2, \cdots, N$, 其中 x, z 是 n 维向量。

考虑非线性响应系统

$$\dot{y}_i(t) = G_i(y_1, y_2, \cdots, y_N) = f_i(y_i(t)) + \sum_{j=1}^N (c_{ij}Ay_j(t)) + u_i(t), i = 1, 2, \cdots, N. \tag{2}$$

其中: G_i 是待定的非线性函数; 采样控制器 $u_i(t) = \alpha(t_k)y(t_k), t \in [t_k, t_{k+1})$, 对任意时刻, 满足 $t_1 < t_2 < \cdots < t_k < t_{k+1} < \cdots$, 且有 $h := t_{k+1} - t_k > 0$, 称其为采样间隔, 并且假设所有时变矩阵都是有界的。

定义1 对于连续可逆线性函数 $\Phi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, i = 1, 2, \cdots, N$, 若响应系统 (2) 与复杂系统 (1) 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - \Phi(y_i(t))\| = 0, i = 1, 2, \cdots, N$, 则称系统 (1) 与系统 (2) 实现广义函数同步。

注1 当 $\Phi(y) = Py + Q$ (其中 P, Q 为常数矩阵) 时, 广义函数同步被称作线型广义同步; 当 $\Phi(y) = \xi_i(t)y$ 时, 广义函数同步被称作广义投影同步^[23]。特别地, 当 $\xi_i(t) \equiv \xi, \xi_i(t) \equiv 1, \xi_i(t) \equiv -1$ 时, 广义函数同步被分别称作投影同步、完全同步及反同步。

接下来建立对应的广义函数, 有 $\dot{\Phi}_i(y_i) = \dot{y}_i(t)[d\Phi_i(y_i)/dy_i(t)] = G_i(y_1, y_2, \cdots, y_N)J_i$,

$$G_i(y_1, y_2, \cdots, y_N) = J_i^{-1}f_i(\Phi_i(y_i)) + J_i^{-1}\sum_{j=1}^N (c_{ij}A\Phi_j(y_j)) + J_i^{-1}\alpha(t_k)\Phi_i(y_i(t_k)), \tag{3}$$

$$\Delta\Phi_i(y_i(t^+)) = U_{ik} = B_{ik}(\Phi_i(y_i) - x_i), i = 1, 2, \cdots, N. \tag{4}$$

其中: J_i^{-1} 为 $J_i = d\Phi_i(y_i)/dy_i$ 的逆矩阵; B_{ik} 为反馈增益矩阵。设 $\beta = L + \lambda_{\max}(C \otimes A)$, 其中 \otimes 为 Kronecker 积。

引理1^[24] 对任意 $x, y \in \mathbf{R}^n$, 存在正定矩阵 $S \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 使得 $x^T y \leq (x^T S x + y^T S^{-1} y)/2$ 成立。

2 同步分析

定理1 若存在 $\gamma > 0$, 使得分段连续函数 $l(t) = \beta + \alpha(t_k)/2 < \gamma$, 且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t [l(s) + \mu(s)e^{\gamma h}] ds = -\infty. \tag{5}$$

其中: $\mu(t) = \alpha(t_k)/2; t \in [t_k, t_{k+1}); h = t_{k+1} - t_k$, 则响应系统 (2) 实现了与复杂系统 (1) 的广义函数同步。

证明 定义误差项为 $e_i(t) = x_i(t) - \Phi_i(y_i(t))$, 建立李雅普诺夫函数为 $V(t) = \sum_{i=1}^N (e_i^T(t)e_i(t))/2$, 根据假设 1 及式 (1) ~ 式 (3) 可以得到,

$$dV(t)/dt = \sum_{i=1}^N (e_i^T \dot{e}_i) = \sum_{i=1}^N \{e_i^T [f_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N (c_{ij}Ax_j(t)) + \alpha(t)x(t) - G_i(y_1, y_2, \dots, y_N)J_i]\} =$$

$$\sum_{i=1}^N \{e_i^T [f_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N (c_{ij}Ax_j(t)) + \alpha(t)x(t)]\} - \sum_{i=1}^N \{e_i^T [f_i(\Phi_i(y_i(t))) +$$

$$\sum_{j=1}^N (c_{ij}A\Phi_j(y_j(t))) + \alpha(t_k)\Phi_i(y_i(t_k))]\} \leq \sum_{i=1}^N \{e_i^T [Le_i + \sum_{j=1}^N (c_{ij}Ae_j) + \alpha(t_k)e_i(t_k)]\}. \quad (6)$$

再根据引理 1, 式 (6) 变为

$$dV(t)/dt < L \sum_{i=1}^N (e_i^T e_i) + \sum_{i=1}^N \{e_i^T [\sum_{j=1}^N (c_{ij}Ae_j) + \alpha(t_k)e_i(t_k)]\} \leq [L + \lambda_{\max}(C \otimes A)] \sum_{i=1}^N (e_i^T e_i) +$$

$$[\alpha(t_k) \sum_{i=1}^N (e_i^T e_i) + \sum_{i=1}^N (e_i^T(t_k)e_i(t_k))]/2 = [L + \beta - L + \alpha(t_k)/2]V(t) + \alpha(t_k)V(t_k)/2 =$$

$$[\beta + \alpha(t_k)/2]V(t) + \alpha(t_k)V(t_k)/2 = l(t)V(t) + \mu(t)V(t_k), t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (7)$$

考虑方程

$$\dot{V}_1(t) = l(t)V_1(t_k), V_1(t) = V(t_k), t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (8)$$

由于 $\mu(t)V(t_k) \geq 0$, 且当 $t > t_k$ 时, 有 $V(t) \geq V_1(t)$, 从而由式 (8) 可得

$$V_1(t) = \exp\left(\int_{t_k}^t l(s)ds\right)V_1(t_k), t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (9)$$

从而有 $V(t) \geq V_1(t) = \exp\left(\int_{t_k}^t l(s)ds\right)V_1(t_k), t \in [t_k, t_{k+1})$ 。进一步有

$$V(t_k) = V_1(t_k) \leq \exp\left(-\int_{t_k}^t l(s)ds\right)V(t_k), t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (10)$$

则式 (7) 进一步化为 $dV(t)/dt \leq [l(t) + \mu(t)\exp(-\int_{t_k}^t l(s)ds)]V(t_k), t \in [t_k, t_{k+1})$ 。于是,

$$V(t) \leq \exp\left\{\int_{t_k}^t [l(s) + \mu(s)\exp(-\int_{t_k}^s l(\tau)d\tau)]ds\right\}V(t_k) \leq \exp\left\{\int_{t_k}^t [l(s) + \mu(s)e^{\gamma h}]ds\right\}V(t_k) \leq$$

$$\exp\left\{\int_{t_0}^t [l(s) + \mu(s)e^{\gamma h}]ds\right\}V(t_0), t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (11)$$

由式 (5) 可知, $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$, 即有 $e_i(t) (i = 1, 2, \dots, N)$ 渐进趋于 0。根据定义 1 可得, 响应系统 (2) 实现了与复杂系统 (1) 的广义函数同步。

引理 2^[25] 若一个函数 $l(t)$ 是一致稳定函数, 当且仅当 $\int_t^{t+T} l(s)ds \leq -c$ 、 $\int_t^{t+\theta} l(s)ds \leq d, \forall \theta \in [0, T]$ 成立。其中: $c, d, T > 0$ 为常数。

定理 2 若存在分段连续函数 $l(t)$, 满足 $l(t) = \beta + \alpha(t_k)/2 < \gamma, \mu(t) = \alpha(t_k)/2 > 0, t \in [t_k, t_{k+1})$, 且 $l(t) + \mu(t)e^{\gamma h}$ 为引理 2 中的一致稳定函数, 则有 $V(t) \leq e^{c+d}e^{[-c(t-t_0)]/T}V(t_0)$ 。其中: $c, d, T > 0$ 为常数; $V(t) = \sum_{i=1}^N (e_i^T(t)e_i(t))/2$, 则响应系统 (2) 实现了与复杂系统 (1) 的广义函数同步。

证明 若 $l(t) + \mu(t)e^{\gamma h}$ 为一致稳定函数, 则存在满足 $T_{n+1} - T_n = T, T_0 = t_0 (n = 0, 1, \dots)$ 数列 $\{T_n\}_{n=0}^\infty$, 使得 $\int_{T_n}^{T_{n+1}} [l(s) + \mu(s)e^{\gamma h}]ds \leq -c, \int_{T_n}^{T_{n+1}+\theta} [l(s) + \mu(s)e^{\gamma h}]ds \leq d$, 其中: $\theta \in [0, T]$ 。对于 $t \in [T_n, T_{n+1})$, 存在 $\theta_1 \leq T$, 使得 $t = t_0 + nT + \theta_1$ 。结合式 (11) 可得, $V(t) \leq \exp\left\{\int_{T_n}^t [l(s) + \mu(s)e^{\gamma h}]ds\right\} \exp\left\{\int_{T_{n-1}}^{T_n} [l(s) + \mu(s)e^{\gamma h}]ds\right\} \times \dots \times \exp\left\{\int_{T_0}^{T_1} [l(s) + \mu(s)e^{\gamma h}]ds\right\}V(t_0) \leq$

$e^d e^{-nc} V(t_0) \leq e^d e^{\lceil -c(t-t_0) \rceil / T} e^c V(t_0) = e^{(c+d)} e^{\lceil -c(t-t_0) \rceil / T} V(t_0)$ 。此时, 同样有 $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$ 。根据定义1, 响应系统(2)实现了与复杂系统(1)的广义函数同步。

3 数值模拟

本节考虑一个具有3个节点的简单动态网络作为上述理论的应用。外部耦合矩阵为 $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 。

首先, 规定

$$f_i(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a(x_2 - x_1) \\ cx_1 - x_1x_3 - x_2 \\ x_1x_2 - bx_3 \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots, N.$$
 (12)

其中: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ 。此时可以将式(12)改写为 $f_i(x) = D\mathbf{x} + \Psi(x)$ 。取 $D = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2.67 \end{pmatrix}$, $\Psi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}$ 。

通过计算可以得到 $\|f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{z})\| \leq \|D(\mathbf{x} - \mathbf{z})\| + \|\Psi(\mathbf{x}) - \Psi(\mathbf{z})\| \leq 70\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|$ 。再对 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$, 取广义线性函数为 $\Phi_i(y) = \Phi(y) = (y_1, 2y_2 + 1, y_3 - 2)$, 则有 $\Phi^{-1}(y) = (y_1, (y_2 - 1)/2, (y_3 + 2)/3)^T$, 则有 $J_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $J_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ 。根据式(7), 可取 $l(t) = -11.2 +$

$0.5\sin(t)$, 取 $h = t_{k+1} - t_k = 0.01$, 使得定理1中条件成立, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t [l(s) + \mu(s)e^{\gamma h}] ds = -\infty$, 此时可由系统误差图(见图1)表现出 $e_{i1}(t)$ 、 $e_{i2}(t)$ 、 $e_{i3}(t)$ ($i = 1, 2, 3$) 迅速收敛趋于0。

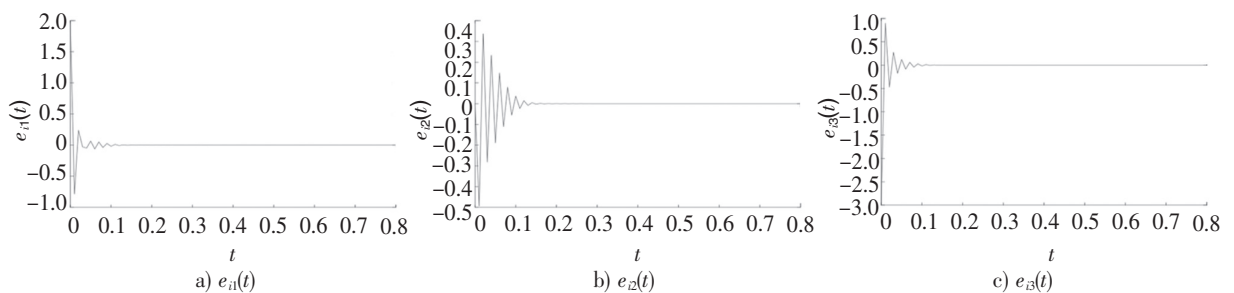


图1 系统的误差轨迹
Fig.1 Error trajectory of system

4 结论

本文研究了一类在采样数据控制下的复杂网络的广义函数同步问题。通过构造合适的外部函数, 并结合稳定性理论, 将李雅普诺夫函数转化为具有时变动态的线性函数, 从而得出了该类型复杂网络在采样数据控制下实现广义函数同步的新判断依据。最后, 通过数据模拟, 验证了理论结果的正确性。

[参考文献]

[1] DAI Y, CAI Y Z, XU X M. Synchronization criteria for complex dynamical networks with neutral-type coupling delay[J]. <http://xuebaobangong.jmu.edu.cn/zkb>

- Physica A, 2008, 387: 4673-4682.
- [2] 吕金虎. 复杂网络的同步理论、方法、应用与展望[J]. 力学进展, 2008, 38(6): 713-722.
- [3] LIU Y Z, JIANG C S, LIU C S, et al. Chaotic synchronization secure communications based on the lorenz systems switch[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2009, 29(11): 2641-2644.
- [4] 罗群, 吴薇, 李丽香. 节点含时滞的不确定复杂网络的自适应同步研究[J]. 物理学报, 2008, 57(3): 1529-1533.
- [5] LIU L F, MIAO S X. Outer synchronization between delayed coupling networks with different dynamics and uncertain parameters[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2018, 512: 890-901.
- [6] TANG H W, CHEN L, LU J A, et al. Adaptive synchronization between two complex networks with nonidentical topological structures[J]. Physica A, 2008, 387: 5623-5630.
- [7] JI D H, JEONG S C, PARK J H, et al. Adaptive lag synchronization for uncertain complex dynamical network with delayed coupling[J]. Applied Mathematics Computation, 2012, 218(9): 4872-4880.
- [8] ZHAO Y H, YANG Y Q. The impulsive control synchronization of the drive-response complex system[J]. Physics Letters A, 2008, 372: 7165-7171.
- [9] ZHENG S, DONG G G, BI Q S. Impulsive synchronization of complex networks with non-delayed and delayed coupling[J]. Physics Letters A, 2009, 373: 4255-4259.
- [10] ZHANG Q J, ZHAO J C. Projective and lag synchronization between general complex networks via impulsive control[J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 67: 2519-2525.
- [11] GUO W L. Lag synchronization of complex networks via pinning control[J]. Nonlinear Analysis, 2011, 12(5): 2579-2585.
- [12] HU M, YANG Y, XU Z, et al. Projective synchronization in drive-response dynamical networks[J]. Physica A, 2007, 381: 457-466.
- [13] ZHENG S, BI Q, CAI G. Adaptive projective synchronization in complex networks with time-varying coupling delay[J]. Physics Letters A, 2009, 373: 1553-1559.
- [14] ZHANG R, YANG Y, XU Z, et al. Function projective synchronization in drive-response dynamical network[J]. Physics Letters A, 2010, 374: 3025-3028.
- [15] WU X J, LU H T. Generalized projective synchronization between two different general complex dynamical networks with delayed coupling[J]. Physics Letters A, 2010, 374: 3932-3941.
- [16] WU X J, LU H T. Generalized function projective (lag, anticipated and complete) synchronization between two different complex networks with nonidentical nodes[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012(17): 3005-3021.
- [17] WU X Q, ZHENG W X, ZHOU J. Generalized outer synchronization between complex dynamical networks[J]. Chaos, 2009, 19: 013109.
- [18] YANG Z Q, ZHANG Q, CHEN Z Q. Adaptive linear generalized synchronization between two nonidentical networks[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17(6): 2628-2636.
- [19] LIU H, CHEN J, LU J A, et al. Generalized synchronization in complex dynamical networks via adaptive couplings[J]. Physica A, 2010, 389(8): 1759-1770.
- [20] SHEN B, WANG Z, HUANG T. Stabilization for sampled-data systems under noisy sampling interval[J]. Automatica, 2016, 63: 162-166.
- [21] BRIAT C. Stability analysis and stabilization of stochastic linear impulsive, switched and sampled data systems under dwell time constraints[J]. Automatica, 2016, 74: 279-287.
- [22] WU J, HUANG L. Global stabilization of linear systems subject to input saturation and time delays[J]. Journal of the Franklin Institute, 2021, 358(1): 633-949.
- [23] GUO G, DING L, HAN Q L. A distributed event triggered transmission strategy for sampled-data consensus of multi-agent systems[J]. Automatica, 2014, 50: 1489-1496.
- [24] ZHOU B, EGOROV A V. Razumikhin and Krasovskii stability theorems for time-varying time-delay systems[J]. Automatica, 2016, 71: 281-291.
- [25] LU J, CAO J. Synchronization-based approach for parameters identification in delayed chaotic neural networks[J]. Physica A, 2007, 82: 672-682.