

一些树和单圈图的电阻谱确定

周环¹, 倪琦¹, 吕宁宁², 潘向峰¹

(1. 安徽大学数学科学学院, 安徽 合肥 230601; 2. 安徽工业经济职业技术学院公共教学部, 安徽 合肥 230051)

[摘要] 连通图 G 中两顶点间的电阻距离, 定义为用单位电阻代替每条边之后这两顶点在相应电网络中的等效电阻。主要研究星图、双星图和广义章鱼图的电阻谱确定问题; 利用相关的电网络理论, 证明这些图可以由相应电阻谱确定。

[关键词] 星图; 双星图; 广义章鱼图; 电阻距离; 电阻谱

[中图分类号] O 157.5

Determination of Some Trees and Unicyclic Graphs by Resistance Spectra

ZHOU Huan¹, NI Qi¹, LÜ Ningning², PAN Xiangfeng¹

(1. School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230601, China;

2. Department of Public Education, Anhui Technical College of Industry Economy, Hefei 230051, China)

Abstract: The resistance distance between two vertices in a connected graph G is defined as the effective resistance between the two corresponding nodes in the resulting electrical network obtained by replacing each edge of G with a unit resistor. This paper demonstrated through the application of electrical network theory that star graphs, double star graphs, and generalized octopus graphs were determined by their resistance distance spectra.

Keywords: star; double star; generalized octopus graph; resistance distance; resistance spectra

0 引言

设 $G = (V(G), E(G))$ 是顶点集和边集分别为 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 、 $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 的简单连通图。在图 G 中, 顶点 v_i 和 v_j 之间的经典距离记为 $d_G(v_i, v_j)$, 代表它们之间的最短路径的长度。1993 年, Klein 等^[1] 首次提出了一个新的距离函数, 即电阻距离。令 N 是把一个简单图 G 中的每条边都用单位电阻代替后得到的网络, 图 G 中, u 和 v 之间的电阻距离定义为这两点在 N 中的等效电阻, 记为 $R_G(u, v)$ 。如果 T 是一棵树, 那么 T 上顶点间的电阻距离就是通常的最短路距离。由于自身的重要性及其在其他领域的广泛应用, 电阻距离得到了数学、化学、物理、工程、生物学、社会学、网络科学等众多领域学者的广泛研究, 产生了丰富的理论成果^[2]。

图的谱确定问题的提出已经有 40 多年, 也吸引了很多学者对其进行研究。1973 年, Schwenk^[3] 运用概率的方法说明了几乎所有的树都不是邻接谱确定的。但是, 此后对于一般的图几乎没有这样的结论。因此, 一些特殊图类的谱确定问题得到了广泛的关注。路、路的补图、完全图和圈^[4-5] 都被证

[收稿日期] 2023-04-10

[基金项目] 安徽省高校自然科学研究重点项目 (KJ2021A1534); 安徽省高校优秀青年人才支持计划重点项目 (gxyqZD2022135)

[通信作者] 潘向峰 (1976—), 教授, 博导, 从事图论与组合网络方向研究。E-mail: xfp@ahu.edu.cn

明是邻接谱确定的。Haemers 等^[6]证明了棒棒糖图是邻接谱确定的。 Z_n 图及其与之相关的一些图^[7]、T 型树^[8]也被陆续证明是邻接谱确定的。由于图的拉普拉斯谱和图的连通性具有密切联系,于是图的拉普拉斯谱确定和无符号拉普拉斯谱确定问题也吸引了不少学者的关注。目前,卢鹏丽^[9]证明了所有的似双星树、章鱼图、沙漏图是拉普拉斯谱确定的;Zhang 等^[10]证明了 K_m^n 、 $U_{n,p}$ 及其补图都是拉普拉斯谱确定的。近年来,风筝图^[11]和棒棒糖图^[12]被证明是拉普拉斯谱确定的;双星图^[13]被证明是距离谱确定的。

图 G 的电阻谱 $RS(G)$ 定义为图中所有顶点对的电阻距离构成的多重集。图 G 的电阻谱中的最大元素称为 G 的电阻直径。如果和图 G 具有相同电阻谱的图一定和 G 同构,则一个图 G 被称为可以被电阻谱确定;反之,若存在一个和图 G 非同构的图,使得它具有和图 G 相同的电阻谱,则图 G 不被电阻谱确定。图的电阻谱最初被 Baxter^[14] 用来试图解决图同构问题,他猜测两个图是同构的,当且仅当它们的电阻谱是相同的。然而,在一些反例^[15-16]被发现之后,这个猜想很快就被推翻了。所有不超过 8 个顶点的非同构图都由它们的电阻谱确定。然而,在 9 个点和 10 个点的简单图中,分别有 11 对和 49 对非同构的简单图,其中每对图的电阻谱都相同^[17]。2021 年,徐思奥^[18]证明了圈和完全图都能被电阻谱确定,并且证明了两个连通的有相同电阻谱的距离正则图必有相同的交叉阵列。此外,作为应用,他还找到了 3 种方法来构造无限多对不被电阻谱确定的距离正则图,并从有关文献中找到了一个包含 32 548 个非同构简单图的图集,图集中所有图都有相同的电阻谱。而本文对星图、双星图和广义章鱼图的电阻谱进行了研究,证明了这些图可以由它们的电阻谱确定。

1 预备知识

本文研究的图为简单连通图,没有定义的术语和记号可参见文献 [19]。
设图 $G = (V(G), E(G))$, 其中: $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 表示图 G 的顶点集; $E(G) = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ 表示图 G 的边集。将 $|V(G)| = n$ 称为图 G 的阶数, $|E(G)| = m$ 称为图 G 的边数。若 $e = uv \in E(G)$, 则称 e 的两个端点 u 和 v 是相邻的,并且称顶点 u 、 v 与边 e 相关联。

顶点 u 的所有邻点的个数称作顶点 u 的度,记作 $d_G(u)$ 。图 G 中最大、最小的顶点度分别记作 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 。悬挂点是指图 G 中该点的度为 1 的点,悬挂边是指图 G 中该边的其中一个顶点的度为 1 的边。 $d_G(u, v)$ 为图 G 中两顶点 u 和 v 之间的距离,即图中连接两点的最短路长度,图 G 的直径为 $d(G) = \max\{d(u, v), u, v \in G\}$ 。

对于图 H 和图 G , 若 $V(H) \subseteq V(G)$ 且 $E(H) \subseteq E(G)$, 则称 H 是 G 的一个子图,记作 $H \subseteq G$ 。 G 的边连通度 $\lambda(G)$ 是产生一个平凡图或不连通图需要移除的边的最小数目,移除的最小数目的边称为最小边割^[20]。图 G 的一个非空点、边交替序列 $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_{l-1} v_{l-1}$ ($v_0, v_1, \cdots, v_{l-1}$ 互不相同) 被称为阶数 l 的路,记作 P_l 。若 $v_0 = v_{l-1}$, 则称图 G 是长为 $l-1$ 的圈,记作 C_{l-1} 。称路 P_l 的两个悬挂点为其端点。特别地,当 $l = 1$ 时, P_1 就是一个孤立点,此时规定该孤立点就是 P_1 的端点。两个圈称为不相交的,如果它们没有公共顶点。设 T 为图 G 的一棵生成树,对于任意边 $e \in E(G) \setminus E(T)$, $T + e$ 中含有唯一圈,记为 $C_T(e)$,且称之为 G 关于 T 的一个基本圈^[21]。

星图是指存在一个顶点与其他顶点都相邻,除了该顶点,其他顶点的度都为 1 的图。 $n+1$ 阶的星图记为 S_n 。对于两个不相交的星图 S_m 和 S_n , 用一条边连接它们的两个中心点得到的树称为双星图,记为 $S_{m,n}$ ($m \geq n \geq 1$)。章鱼图是指重合星图 S_n ($n \geq 1$) 的中心顶点和圈图 C_k ($k \geq 3$) 的一个顶点得到的一类单圈图,记作 $O(C_k, S_n)$ 。若图 G 是由圈 C_k ($k \geq 3$) 上 p ($p \leq k$) 个不同顶点分别和 p 个星图 $S_{n_1}, S_{n_2}, \cdots, S_{n_p}$ ($n_i \geq 1, i = 1, \cdots, p$) 的中心顶点重合得到的,则称图 G 为 p 章鱼图,记作 $O(C_k, S_{n_1}, \cdots, S_{n_p})$ 。

下面给出基本圈彼此独立的概念。

定义 1 设有两个基本圈 C_1 和 C_2 , 顶点集分别为 $V(C_1) = \{v_1, \cdots, v_{n_1}\}$ 、 $V(C_2) = \{v_1, \cdots, v_{n_2}\}$, 边集分别为 $E(C_1) = \{e_1, \cdots, e_{m_1}\}$ 、 $E(C_2) = \{e_1, \cdots, e_{m_2}\}$ 。如果 $|V(C_1) \cap V(C_2)| \leq 1$ 、 $E(C_1) \cap$

$E(C_2) = \emptyset$ ，称基本圈 C_1 和 C_2 是彼此独立的。

在电网络中有如下串并联原理：1) 串联原理，若顶点 u 和 v 之间只有 n 个阻值分别为 r_1, r_2, \dots, r_n 欧姆的电阻串联，则 $R(u, v) = r_1 + r_2 + \dots + r_n$ ；2) 并联原理，若顶点 u 和 v 之间只有 n 个阻值分别为 r_1, r_2, \dots, r_n 欧姆的电阻并联，则 $R(u, v) = 1/[1/r_1 + 1/r_2 + \dots + 1/r_n]$ 。

引理 1^[22] (Rayleigh 单调性定律) 若电网络 N 中每条边的电阻保持不变或者增加，那么在新的电网络 M 中，任意两点 u, v 在 M 中的等效电阻 $R_M(u, v)$ 相对于它们在原来的电网络 N 中的等效电阻 $R_N(u, v)$ 是非减的。

由引理 1，可得到命题 1。

命题 1 设图 H 是图 G 的一个子图， $u, v \in V(H)$ ，则 $R_G(u, v) \leq R_H(u, v)$ 。

2 主要结果及其证明

2.1 星图的电阻谱确定

命题 2 星图可以被电阻谱确定。

证明 设图 H 是和星图 S_n 同阶数同电阻谱的图，下证图 H 和图 S_n 同构。可以计算出图 H 的电阻谱为 $RS(H) = \{[1]^n, [2]^{n(n-1)/2}\}$ 。由于在图 H 的电阻谱中没有小于 1 的电阻距离，故图 H 中不含圈（若图 H 中含圈，则圈上相邻顶点间电阻距离必小于 1，矛盾），即图 H 是一棵树。因此，图 H 中的电阻距离就是距离（即最短路距离）。

根据图 H 中最大的距离为 2 知，该树的直径为 2。设顶点 u 和 w 之间的距离为 2，即长为 2 的路，中间顶点记为 v （如图 1）。由图 H 的电阻谱知，顶点 u 和 w 的度均为 1，只有点 v 可以再连长为 1 的路。设其中一条路的边 $e = vp$ ，此时点 p 的度也只能是 1。点 v 不断地连边，直到一共有 $n + 1$ 个顶点，即 $H \cong S_n$ 。

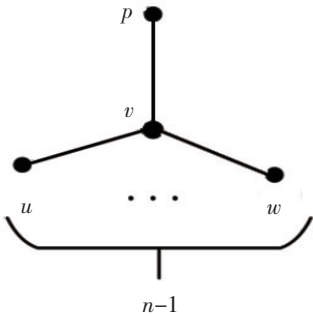


图 1 星图 S_n
Fig.1 A star S_n

2.2 双星图的电阻谱确定

虽然已经知道双星图是距离谱确定的，但是在距离谱确定证明的过程中，不能根据该图的距离谱确定该图不含圈。而对于含圈的图，电阻谱不等于距离谱。因此，双星图的电阻谱确定和距离谱确定是有区别的。因此，本文考虑双星图的电阻谱确定问题。

定理 1 双星图可以被电阻谱确定。

证明 假设图 H 是和双星图 $S_{m,n}$ 同阶数同电阻谱的图，下证图 H 和双星图 $S_{m,n}$ 同构。通过计算，可以得到图 H 的电阻谱为 $RS(H) = \{[1]^{m+n+1}, [2]^{n(n-1)/2+m(m-1)/2+m+n}, [3]^{mn}\}$ 。

由于在图 H 的电阻谱中没有小于 1 的电阻距离，故图 H 中不含圈，即图 H 是一棵树。因此，图 H 中的电阻距离就是距离（即最短路距离）。

根据图 H 中最大的距离为 3 知，该树的直径为 3。设顶点 u 和 v 之间的距离为 3，即 u 和 v 之间有一条长为 3 的路，路上的顶点依次记为 w 和 t （如图 2），则由图 H 的直径为 3 知，顶点 u 和 v 的度均为 1，只有顶点 w 和 t 可以再连长为 1 的路。不妨设顶点 w 的 1 度邻点个数为 x ，顶点 t 的 1 度邻点个数为 y ，则根据图 H 的电阻谱中电阻距离为 3 的重数是 mn 和图 H 的阶数为 $m + n + 2$ ，可列出方程

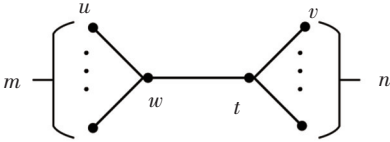


图 2 双星图 $S_{m,n}$
Fig.2 A double star $S_{m,n}$

$$\begin{cases} xy = mn, \\ x + y = m + n, \end{cases} \quad \text{解得 } x = m, y = n,$$
或者 $x = n, y = m$ ，即图 H 与 $S_{m,n}$ 同构。

2.3 广义章鱼图的电阻谱确定

广义章鱼图 $O(C_k, P_l, S_{n-k-l+1})$ (如图3) 是通过将 P_l 的两个端点分别与 C_k 的任意一个点、 $S_{n-k-l+1}$ 的中心点重合得到的顶点数为 n 的图。当 $l = 1$ 时, 顶点数为 n 的章鱼图 $O(C_k, S_{n-k})$ 如图4所示。

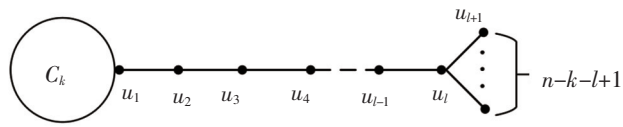


图3 图 $O(C_k, P_l, S_{n-k-l+1})$
Fig.3 The graph $O(C_k, P_l, S_{n-k-l+1})$

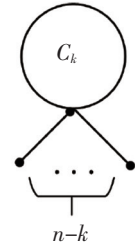


图4 章鱼图 $O(C_k, S_{n-k})$
Fig.4 Octopus graph $O(C_k, S_{n-k})$

定理2 广义章鱼图 $O(C_k, P_l, S_{n-k-l+1})$ ($k \geq 3, l \geq 1, n \geq k + l$) 可以被电阻谱确定。
证明 分2种情形进行讨论。
1) $l = 1$ 。此时 $O(C_k, P_l, S_{n-k-l+1})$ 就是章鱼图 $O(C_k, S_{n-k})$ 。假设图 H 是和图 $O(C_k, S_{n-k})$ 同阶数同电阻谱的图, 下证图 H 和图 $O(C_k, S_{n-k})$ 同构。

通过计算, 可以得到图 H 的电阻谱, 即当 k 为偶数时,
$$RS(H) = \{ [(k-1)/k]^k, [2(k-2)/k]^k, \dots, [(k/2-1)(k/2+1)/k]^k, [k/4]^{k/2}, [1]^{n-k}, [2]^{(n-k)(n-k-1)/2}, [(k-1)/k+1]^{2(n-k)}, [2(k-2)/k+1]^{2(n-k)}, \dots, [(k/2-1)(k/2+1)/k+1]^{2(n-k)}, [k/4+1]^{n-k} \}.$$

当 k 为奇数时,
$$RS(H) = \{ [(k-1)/k]^k, [2(k-2)/k]^k, \dots, [\lfloor k/2 \rfloor \lceil k/2 \rceil / k]^k, [1]^{n-k}, [2]^{(n-k)(n-k-1)/2}, [(k-1)/k+1]^{2(n-k)}, [2(k-2)/k+1]^{2(n-k)}, \dots, [\lfloor k/2 \rfloor \lceil k/2 \rceil / k + 1]^{2(n-k)} \}.$$

首先令 $f(i) = i(k-i)/k$, 易知 $f(i)$ 在区间 $[1, k/2]$ 上单调递增。当 $k \geq 4$ 时, $2(k-2)/k = 2 - 4/k \geq 1$, $(k-1)/k < 1$; 当 $k = 3$ 时, $f(i) = 2/3 < 1$ 。从而在图 H 的电阻谱中, 小于1的电阻距离只有 $(k-1)/k$ 一种。

根据图 H 的电阻谱知, 存在顶点 u 和 v , 使得这两点之间电阻距离为 $R_H(u, v) = (k-1)/k < 1$, 则 $\lambda(u, v) \geq 2$, 即 u 和 v 之间至少存在两条边不相交的路。故图 H 中必含有圈。下证图 H 中只有一个基本圈。

假设图 H 中有 t ($t \geq 2$) 个基本圈 $C_{k_1}, C_{k_2}, \dots, C_{k_t}$, 令 j 为图 H 中电阻距离小于1的点对数。
(1) t 个基本圈彼此独立 ($k_i \geq 3, i = 1, 2, \dots, t$), 此时 $j = k_1 + k_2 + \dots + k_t = k$, 其中 k 为电阻距离 $(k-1)/k$ 的重数。然而在每个独立的基本圈 C_{k_i} 中, 相邻点对 u 和 v 之间的电阻距离为 $R_{C_{k_i}}(u, v) = (k_i-1)/k_i \neq (k-1)/k = R_H(u, v)$, 与“小于1的电阻距离只有 $(k-1)/k$ 一种”矛盾。

(2) t 个基本圈不是彼此独立 ($k_i \geq 3, i = 1, 2, \dots, t$)。设 C_m 为 H 中的最长圈, $C_m \subseteq H$, 由于“小于1的电阻距离只有 $(k-1)/k$ 一种”, 故在 H 中圈上相邻两点 u 和 v 间电阻距离为 $R_H(u, v) = (k-1)/k$ 。根据命题1知, $R_H(u, v) \leq R_{C_m}(u, v)$ 。在 C_m 中, 由于 $m < k$, 故 $R_H(u, v) \leq R_{C_m}(u, v) = (m-1)/m < (k-1)/k = R_H(u, v)$, 矛盾。

综上所述, 图 H 中只有一个基本圈, 记为 C_p 。由 $R_{C_p}(u, v) = R_H(u, v)$ 知, $(p-1)/p = (k-1)/k$, 则 $p = k$, 即图 H 中包含一个圈 C_k 。

当 $k \neq 4, 8$ 时, 由图 H 的电阻谱中电阻距离 $(k-1)/k+1$ 的重数为 $2(n-k)$, 以及电阻距离为1的重数是 $n-k$ 知, 其他部分是 $n-k$ 条边不交且长为1的路。否则, 若存在一条长为 d ($d \geq 2$) 的路, 则电阻距离 $(k-1)/k+1$ 的重数小于 $2(n-k)$, 矛盾。当 $k = 4$ 时, 电阻距离 $(k-1)/k+1$ 的

重数为 $2(n-k)$, 电阻距离为 1 的重数是 $n-k+2$ 。当 $k=8$ 时, 电阻距离 $(k-1)/k+1$ 的重数为 $2(n-k)+8$, 电阻距离为 1 的重数是 $n-k$ 。这两种情况也可用同样的方法推出矛盾。

假设这 $n-k$ 条长为 1 的路分别连在圈 C_k 的 m 个点上, 每个点上各连了 q_1, q_2, \dots, q_m 条, 并且至少存在一个 $q_i > 0 (i=1, \dots, m)$, 如图 5 所示的 m 章鱼图 $O(C_k, S_{q_1}, \dots, S_{q_m})$ 。根据电阻距离为 2 的重数是 $(n-k)(n-k-1)/2 (k \neq 4, 8, 9)$ 知, $q_1(q_1-1)/2 + q_2(q_2-1)/2 + \dots + q_m(q_m-1)/2 = (n-k)(n-k-1)/2$, 且 $q_1 + q_2 + \dots + q_m = n-k$ 。化简该方程组得, $(q_1 + q_2 + \dots + q_m)^2 = q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_m^2$, 即 $2 \sum_{i \neq j} (q_i q_j) = 0 (i, j = 1, \dots, m)$ 。再由至少存在一个 $q_i > 0 (i=1, \dots, m)$ 知, 该方程组整数解只有 $q_i = n-k (i=1, \dots, m)$, $q_j = 0 (j \neq i)$, 即这 $n-k$ 条长为 1 的路均连在圈 C_k 的 1 个点上。故图 H 和图 $O(C_k, S_{n-k})$ 同构。当 $k=4, 8, 9$ 时, 同理可证。

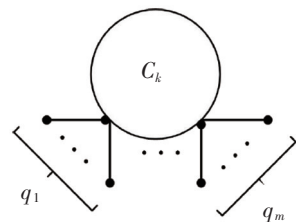


图 5 m 章鱼图 $O(C_k, S_{q_1}, \dots, S_{q_m})$

Fig.5 m Octopus graph $O(C_k, S_{q_1}, \dots, S_{q_m})$

2) $l \geq 2$ 。设图 H 是和图 $O(C_k, P_l, S_{n-k-l+1}) (l \geq 2)$ 同阶数同电阻谱的图。下证图 H 和图 $O(C_k, P_l, S_{n-k-l+1}) (l \geq 2)$ 同构。

通过计算可以得到图 H 的电阻谱, 即当 k 为偶数时,

$$\begin{aligned} \text{RS}(H) = \{ & [(k-1)/k]^k, [2(k-2)/k]^k, \dots, [(k/2-1)(k/2+1)/k]^k, [k/4]^{k/2}, [1]^{n-k}, \\ & [2]^{n-k-1+(n-k-l+1)(n-k-l)/2}, [3]^{n-k-2}, \dots, [l-1]^{n-k-l+2}, [l]^{n-k-l+1}, [(k-1)/k+1]^2, \dots, [(k-1)/k+l-1]^2, \\ & [(k-1)/k+l]^{2(n-k-l+1)}, [2(k-2)/k+1]^2, \dots, [2(k-2)/k+l-1]^2, [2(k-2)+l]^{2(n-k-l+1)}, [(k/2-1)(k/2+1)/k+1]^2, \dots, \\ & [(k/2-1)(k/2+1)/k+l-1]^2, [(k/2-1)(k/2+1)/k+l]^{2(n-k-l+1)}, [k/4+1]^1, \dots, [k/4+l-1]^1, [k/4+l]^{n-k-l+1} \}. \end{aligned}$$

当 k 为奇数时,

$$\begin{aligned} \text{RS}(H) = \{ & [(k-1)/k]^k, [2(k-2)/k]^k, \dots, [\lfloor k/2 \rfloor \lceil k/2 \rceil / k]^k, [1]^{n-k}, [2]^{n-k-1+(n-k-l+1)(n-k-l)/2}, \\ & [3]^{n-k-2}, \dots, [l-1]^{n-k-l+2}, [l]^{n-k-l+1}, [(k-1)/k+1]^2, \dots, [(k-1)/k+l-1]^2, [(k-1)/k+l]^{2(n-k-l+1)}, \\ & [2(k-2)/k+1]^2, \dots, [2(k-2)+l-1]^2, [2(k-2)/k+l]^{2(n-k-l+1)}, \dots, [\lfloor k/2 \rfloor \lceil k/2 \rceil / k+1]^2, \dots, \\ & [\lfloor k/2 \rfloor \lceil k/2 \rceil / k+l-1]^2, [\lfloor k/2 \rfloor \lceil k/2 \rceil / k+l]^{2(n-k-l+1)} \}. \end{aligned}$$

先证图 H 中包含一个圈 C_k , 证明过程同情形 1。

(1) 圈 C_k 的阶数 k 为偶数。根据图 H 的电阻谱中电阻距离 $(k-1)/k+1$ 的重数在 $k \neq 8$ 时为 2 (在 $k=8$ 时, 其重数为 10) 知, 圈 C_k 上只有一个度大于 2 的顶点, 设为 v , 且 v 的度必为 3。由于在图 H 的电阻谱中最大的电阻距离为 $k/4+l$, 圈 C_k 外的所有边构成的集合的导出子图是一棵直径为 l 的树, 设为 T 。设 $P = u_1 u_2 \dots u_l u_{l+1}$ 为 T 上一条长为 l 的路, 则 $v = u_1$ 或 $v = u_{l+1}$ 。不妨设 $v = u_1$ 。又因为电阻距离 $k/4+l$ 的重数是 $n-k-l+1$, 故 T 为 P 上顶点 u_l 再悬挂 $n-k-l$ 条悬挂边得到。从而图 H 和图 $O(C_k, P_l, S_{n-k-l+1}) (l \geq 2)$ 同构。

(2) 圈 C_k 的阶数 k 为奇数。根据图 H 的电阻谱中电阻距离 $(k-1)/k+1$ 的重数为 2 知, 圈 C_k 上只有一个度大于 2 的顶点, 设为 v , 且 v 的度必为 3。由图 H 的电阻谱中最大的电阻距离为 $\lfloor k/2 \rfloor \lceil k/2 \rceil + l$ 知, 圈 C_k 外的所有边构成的集合的导出子图是一棵直径为 l 的树, 设为 T 。设 $P = u_1 u_2 \dots u_l u_{l+1}$ 为 T 上一条长为 l 的路, 则 $v = u_1$ 或 $v = u_{l+1}$ 。不妨设 $v = u_1$ 。再根据电阻距离 $\lfloor k/2 \rfloor \lceil k/2 \rceil + l$ 的重数是 $2(n-k-l+1)$, 故 T 为 P 上顶点 u_l 再悬挂 $n-k-l$ 条悬挂边得到。从而图 H 和图 $O(C_k, P_l, S_{n-k-l+1}) (l \geq 2)$ 同构。

综上所述, 广义章鱼图 $O(C_k, P_l, S_{n-k-l+1})$ 可以被电阻谱确定。

3 结论

本文主要研究了星图、双星图和广义章鱼图的电阻谱, 利用相关的电网络理论和图论知识, 证明

了这些图分别可以由它们的电阻谱确定。关于双圈图、多圈图、完全二部图、图的边数能否由电阻谱确定等问题, 尚待进一步研究。

[参 考 文 献]

- [1] KLEIN D J, RANDIĆ M. Resistance distance[J]. Journal of Mathematical Chemistry, 1993, 12: 81-95.
- [2] 杨玉军. 图的电阻距离综述[J]. 集美大学学报(自然科学版), 2022, 27(1): 1-16.
- [3] SCHWENK A J. Almost all trees are cospectral[C]//New Directions in the Theory of Graphs. New York: Academic Press, 1973: 275-307.
- [4] VAN DAM E R, HAEMERS W H. Which graphs are determined by their spectrum? [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2003, 373: 241-272.
- [5] DOOB M, HAEMERS W H. The complement of the path is determined by its spectrum[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2002, 356(1/3): 57-65.
- [6] HAEMERS W H, LIU X, ZHANG Y. Spectral characterizations of lollipop graphs[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2008, 428(11/12): 2415-2423.
- [7] SHEN X L, HOU Y P, ZHANG Y P. Graph Z_n and some graphs related to Z_n are determined by their spectrum[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2005, 404: 58-68.
- [8] WANG W, XU C X. On the spectral characterization of T -shape trees[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2006, 414(2/3): 492-501.
- [9] 卢鹏丽. 图的谱确定性研究[D]. 兰州: 兰州理工大学, 2009.
- [10] ZHANG X L, ZHANG H P. Some graphs determined by their spectra[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2009, 431(9): 1443-1454.
- [11] DAS K C, LIU M H. Kite graphs determined by their spectra[J]. Applied Mathematics and Computation, 2017, 297: 74-78.
- [12] ZHANG Y P, LIU X G, ZHANG B Y, et al. The lollipop graph is determined by its Q -spectrum[J]. Discrete Mathematics, 2009, 309(10): 3364-3369.
- [13] 鲁卢. 双星图的距离谱确定性[D]. 乌鲁木齐: 新疆大学, 2016.
- [14] BAXTER L. Counter examples wanted-graph isomorphism & resistances[EB/OL]. (1999-04-22) [2023-04-05]. <http://sci.math.Research.newsgroup.posting>.
- [15] BAXTER L. Counter example wanted for graph isomorphism conjecture[EB/OL]. (1999-04-26) [2023-04-05]. <http://comp.theory.newsgroup.posting>.
- [16] RICKARD J. Counter example wanted for graph isomorphism conjecture[EB/OL]. (1999-04-23) [2023-04-05]. <http://comp.theory.newsgroup.posting>.
- [17] WEISSTEIN E W. Resistance-equivalent graphs[EB/OL]. (2021-03-10) [2023-04-05]. <https://api.semanticscholar.org/corpusID:197501201>.
- [18] 徐思奥. 基于电阻距离的几类图参数的研究[D]. 合肥: 安徽大学, 2021.
- [19] 卢开澄, 卢华明. 图论及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社有限公司, 1995.
- [20] 王晓丽, 张国志. 图的边连通度的一些结果[J]. 山西大同大学学报(自然科学版), 2021, 37(3): 22-23.
- [21] 黄元秋, 刘彦佩. 图的生成树, 基本圈与 Betti 亏数[J]. 数学物理学报, 2004(4): 496-500.
- [22] STRUTT J W. On the theory of resonance[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1871(161): 77-118.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)